MODELOS MATEMÁTICOS PARA ESTIMAR O PESO DE COELHOS[1]

PAULO ROBERTO CURI[2], JOSÉ ROBERTO VELOSO NUNES[3] e MARLENE ABDALLAH CURI[4]

RESUMO - Com medidas dos coelhos das raças Norfolk, Califórnia e Nova-Zelândia foram efetuados os ajustes das curvas logística e de Gompertz para explicar o crescimento do peso corporal (y) como função da idade em dias (x), usando-se um método aproximado. Este pode ser resumido nas etapas: fixação da assíntota horizontal ($y = a$) com base na observação dos dados; transformação do peso, fazendo-se $y = \ln [(a - y)/y]$ na logística e $y = \ln \ln(a/y)$ na Gompertz, com vistas à linearização das curvas; ajuste de regressão linear pelo método dos mínimos quadrados ($\hat{Y} = A + BX$) e uso da transformação inversa para a obtenção das estimativas das funções logística $\hat{y} = a/(1 + bc^x)$ e de Gompertz $\hat{y} = ab^{c^x}$. O método aproximado proporcionou ajustes excelentes (em especial para Gompertz), com coeficientes de determinação maiores que 0,98 e com pequenas diferenças entre os valores observados (y) e os estimados ($\hat{y}$). A simplicidade de cálculo torna esse método bastante útil, principalmente quando não se dispuser de computadores para a determinação das estimativas a, b e c dos parâmetros por métodos iterativos.

Termos para indexação: função Gompertz, logística.

MATHEMATICAL MODELS FOR ESTIMATING THE RABBIT BODY WEIGHT

ABSTRACT - A method was used to adjust the data of rabbit body weights to logistic and Gompertz curves for explaining the growth (y) as a function of age in days (x). This method consists of the following steps: fixation of horizontal asymptote ($y = a$) from the data; transformation of weight $y = \ln [(a - y)/y]$ for logistic and $y = \ln \ln (a/y)$ for Gompertz, in order to make a linearization of curves; adjustment of the linear regressión by least squares ($\hat{Y} = A + BX$) and the use of the inverse transformation for estimating the logistic $\hat{y} = a/(1 + bc^x)$ and Gompertz $\hat{y} = ab^{c^x}$ functions. The approximate methods provided excellent adjustment (for Gompertz specially), with determination coefficients beyond 0.98 and with small differences between the observed (y) and estimated ($\hat{y}$) data. The ease of calculation makes the proposed method very useful, mainly in case of lack of computers for determining the estimates a, b, c by interative methods.

Index terms: Gompertz function, logistic function.

INTRODUÇÃO

O conhecimento da curva de crescimento biológico, em especial quando aplicada a animais de valor econômico, é a etapa inicial que permite orientar critérios relacionados com o arraçoamento, com a reprodução, com a avaliação da capacidade de genitores e com a seleção de exemplares mais capacitados.

O estudo e a proposição de funções de crescimento biológico não constituem novidade, sendo motivo de um número muito grande de trabalhos publicados. Stevens (1951) destacou que uma regressão polinomial é inconveniente para a situação em que a variável dependente (y) se aproxima de uma assíntota horizontal quando a variável independente (x) tende a infinito. Para estes casos, sugeriu o uso de regressão assintótica da forma $y = \alpha + \beta\rho^x$ (equação de Spilman) com $x = 0, 1, 2, \ldots$ e $0 < \rho < 1$, sendo α, β e ρ os parâmetros, estimáveis com base em valores amostrais. No entanto, Rao et al. (1977) propuseram uma equação do sétimo grau para ajustar os pesos corporais de coelhos como função da idade em semanas.

As funções tradicionalmente usadas para representar o crescimento biológico, tais como as de Gompertz, de Mitscherlich e a logística, podem ser transformadas na equação de Spilman. Usando-se processos iterativos, determinam-se os valores

1 Aceito para publicação em 10 de julho de 1985.

2 Biólogo, Prof.-Adj. do Serviço de Estat. Fac. de Med. de Botucatu, SP - UNESP, CEP 18600 Botucatu, SP.

3 Med. Vet., Prof. - Adjunto, Dep. de Produção e Exploração Animal, Fac. de Med. Vet. e Zoot. de Botucatu, CEP 18600 Botucatu, SP.

4 Técnica de Laboratório, Serviço de Estatística, Fac. de Med. de Botucatu, SP - UNESP, CEP 18600 Botucatu, SP.

de a, b e c, que são, respectivamente, as estimativas dos parâmetros α, β e ρ.

Croxton & Cowden (1955) sugeriram métodos de ajuste para a equação de Spilman, para a função de Gompertz e para a logística. O método consiste em dividir os valores observados de y em três subconjuntos iguais, calculando-se, a seguir, os subtotais de cada parte, sendo denominado de "método dos totais parciais". Deste procedimento resulta um sistema de três equações a três incógnitas. Os autores sugeriram que a escolha do tipo de equação a se ajustar aos dados deveria ser orientado pela elaboração prévia de um gráfico com os valores observados. Propuseram, ainda, alguns critérios que auxiliariam a escolha da curva a ser ajustada.

A função de Gompertz pode ser ajustada pelo método proposto por Stevens (1951), e a função logística, pelo método proposto por Nelder (1961), nos casos em que é razoável aceitar que o logarítmo da variável dependente (y) tem variância constante ao longo do tempo (x). Tanto o método de Stevens como o de Nelder utilizam processos iterativos para o cálculo das estimativas dos parâmetros (A, B, C), o que torna quase indispensável o uso de computador.

Vieira & Mischan (1976) afirmaram que a função de Gompertz, ajustada pelo método de Stevens, proporcionou bons resultados no estudo descritivo de dados de crescimento ponderal de bovinos, e recomendaram que, se não existir dificuldade quanto ao uso de computadores, podem ser ajustadas tanto a função de Gompertz como a logística para posterior comparação dos resultados.

Mischan & Curi (1980), trabalhando com dados individuais de peso de bovinos, medidos ao longo do tempo, propuseram uma aproximação para o ajustamento de funções assintóticas de crescimento biológico. Foram utilizadas as funções de Mitscherlich, a logística e a de Gompertz, fixando-se como constante um dos três parâmetros destas equações. Os melhores ajustes foram conseguidos quando se fixou o valor y_{∞} = a da assíntota horizontal, o que foi feito com base na observação gráfica dos valores observados para cada animal. A confrontação entre os valores obtidos para os parâmetros e a comparação entre as somas de quadrados dos desvios entre os valores observados e os esperados, pelo método simplificado proposto e pelos métodos computacionais de Stevens e de Nelder, sugeriram a possibilidade de utilizar a simplificação proposta, caso não haja disponibilidade de computadores para a realização do processo iterativo de cálculo. Como Mischan & Curi (1980) trabalharam com dados de peso do mesmo indivíduo ao longo do tempo, existia uma estrutura de dependência subjacente aos dados, o que conduziria a uma superestimativa do valor do coeficiente de determinação (r^2) encontrado.

A transformação da variável dependente, com vistas à linearização de curvas, não constitui propriamente uma inovação, conforme pode ser visto em uma revisão de trabalhos sobre dinâmica de populações (Santos 1978). No entanto, seu uso para o ajuste das funções de crescimento, com a fixação preliminar do valor da assíntota horizontal, não é difundido.

Neste trabalho utilizaram-se dados de peso corporal de coelhos das raças Norfolk, Califórnia e Nova-Zelândia, com lotes diferentes sendo avaliados em idades que variaram de 1 até 119 dias (medidas semanais). Para os ajustes propostos foram utilizadas as médias aritméticas de cada idade, unicamente para simplificação dos cálculos, nada havendo no sentido de impedir a utilização dos valores individuais.

Da mesma forma que em Mischan & Curi (1980), é proposta a fixação da assíntota horizontal, o que pode ser feito pela observação visual do gráfico do crescimento do peso ou simplesmente pela observação dos valores individuais coletados no último dia de medida. A seguir, é proposta uma transformação da variável dependente (y = peso corporal), visando a linearização da curva de crescimento. As estimativas dos outros dois parâmetros da curva são feitas calculando-se o coeficiente angular e linear da regressão da variável transformada como função do tempo, pelo método dos mínimos quadrados, seguida da transformação inversa para a obtenção da curva.

A vantagem da utilização do método aproximado proposto é que a transformação da variável dependente, o ajuste da regressão linear e a transformação inversa para a obtenção dos dois parâmetros restantes da curva de crescimento podem ser realizados de maneira elementar, dispondo-se de uma máquina de calcular simples, prescindindo, portanto, do uso de computadores e de métodos mais elaborados de cálculo. Por outro lado, a fixação do valor da assíntota horizontal ($y = a$) decorre da mera observação dos dados e/ou do conhecimento prévio que o pesquisador dispõe a respeito do animal que está sendo estudado.

MATERIAL E MÉTODOS

Foram utilizados dados de peso corporal de coelhos de três raças: Norfolk, Califórnia e Nova-Zelândia Branca. As medidas foram efetuadas semanalmente até a idade de 119 dias (17ª semana). Os lotes de animais usados em cada idade variaram de tamanho, sendo maiores para as idades mais precoces.

Os coelhos permaneceram alojados em gaiolas metálicas suspensas, com bebedouros e comedouros automáticos. As fezes e urina eram periodicamente removidas com a limpeza do chão sob as gaiolas. Estas foram colocadas em um galpão de alvenaria, com ventilação natural feita pelas laterais do prédio, protegidas por tela e providas de cortina de plástico utilizadas nos dias mais frios.

Foi usada ração comercial peletizada, de boa procedência, com nível protéico ao redor de 15%. O desmame foi realizado no 28º dia. Os coelhos desmamados foram separados das mães e alojados em gaiolas metálicas coletivas, com ração igual à anterior, oferecida em comedouros automáticos.

Os símbolos usados neste trabalho estão discriminados a seguir:

- Xi = idade em dias do lote de animais (variável independente);
- yi = variável dependente original que corresponde à média em gramas de peso corporal dos animais com idade Xi;
- Yi = variável dependente transformada com o objetivo de linearizar a curva de crescimento;
- $\hat{Y}i$ = valor estimado da variável dependente, resultante do ajuste linear;
- $\hat{y}i$ = valor estimado da variável dependente obtido com a utilização da curva de crescimento;
- a = estimativa da assíntota horizontal à curva de crescimento, o que corresponderia a um valor limite do peso;
- b = estimativa do parâmetro da curva de crescimento relacionado com o ponto onde esta curva intercepta o eixo das ordenadas, ou seja, com o peso inicial;
- c = estimativa do parâmetro da curva de crescimento relacionado com a inclinação que esta apresenta em relação ao eixo horizontal;
- A, B = estimativas dos coeficientes linear e angular, respectivamente, da regressão linear obtida após a transformação dos valores originais do peso.

O método aproximado proposto pode ser resumido nas etapas:

a. fixação preliminar do valor $y = a$ da assíntota horizontal da curva de crescimento, com base na observação dos dados anotados no último dia de pesagem;
b. mudança do valor observado do peso (yi) no valor transformado (Y_i), com o objetivo de linearizar a curva;
c. ajuste da regressão linear $\hat{Y}_i = A + BX_i$, pelo método dos mínimos quadrados;
d. uso da transformação inversa para a obtenção dos valores estimados ($\hat{y}_i$) da curva de crescimento.

As transformações de y_i em Y_i e de $\hat{Y}_i$ em $\hat{y}i$ dependem da equação de crescimento a ser utilizada.

Na função de crescimento de Gompertz, $y = ab^{c^X}$, tem-se $a > 0$ e b, $c \in (0; 1)$. Para sua linearização, o valor ($y = a$) da assíntota horizontal deve ser previamente fixado. A transformação proposta para obter a linearização pode ser entendida a seguir:

$$\text{de } y_i = ab^{c^{X_i}} \Rightarrow a/y_i = 1/b^{c^{X_i}}$$

$$\ln(a/y_i) = -\ln b . c^{X_i} \Rightarrow \ln(\ln(a/y_i)) = \ln(-\ln b) + Xi . \ln c$$

Então:

$$Y_i = \ln(\ln(a/y_i)) \text{ é a transformação proposta, e}$$
$$A = \ln(-\ln b) \Rightarrow b = \exp(-\exp A)$$
$$B = \ln c \Rightarrow c = \exp(B)$$

A derivada primeira de y em relação a X fornece a equação da velocidade do ganho de peso em função da idade:

$$Vi = dy/dX = a . \ln b . \ln c . c^{Xi} . b^{c^{X_i}}$$

A derivada segunda de y permite a obtenção do ponto de inflexão da curva:

$$PI\,([\ln(-1/\ln b)]/\ln c; a/e)$$

onde ln = logaritmo natural e *e* é a base deste sistema.

A inflexão da curva corresponde ao ponto onde a velocidade de ganho de peso dos animais é máxima.

Na função logística de crescimento, $y = a/(1 + bc^X)$ tem-se a, $b > 0$ e $0 < c < 1$. Para sua linearização fixa-se o valor da assíntota horizontal e procede-se como a seguir:

$$\text{de } yi = a/(1 + bc^{Xi}) \Rightarrow a/yi = 1 + b\,c^{Xi}$$
$$a/yi - 1 = b\,c^{Xi} \Rightarrow \ln((a - yi)/yi) = \ln b + \ln c . Xi$$

Então,

$$Yi = \ln((a - yi)/yi) \text{ é a transformação proposta, e}$$
$$A = \ln b \Rightarrow b = \exp(A)$$
$$B = \ln c \Rightarrow c = \exp(B).$$

A equação da velocidade do ganho de peso é:

$$Vi = -ab \ln c . c^{Xi}/(1 + b\,c^{Xi})^2$$

e o ponto de inflexão tem coordenadas PI ($-\ln b/\ln c; a/2$).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em cada uma das raças, separadamente, pela observação dos pesos corporais dos coelhos, foram considerados três valores para a assíntota horizontal: o primeiro, com base no peso individual mais elevado no último dia de medida; e o segundo, baseado na média do peso nesta idade (119 dias), e o terceiro, tomado como valor intermediário aos outros dois. Com isto, objetivou-se verificar a repercussão de diferentes escolhas da assíntota ($y = a$) nos valores estimados ($\hat{y}_i$), nos coeficientes de determinação (r^2), no quadrado médio residual da análise de variância da regressão e na percentagem de erro das estimativas.

Para os coelhos Norfolk foram utilizados os valores a = 3.600, a = 3.500 e a = 3.400 para a assíntota. A boa concordância entre os valores estimados e os observados, os elevados coeficientes de determinação e a análise de variância da regressão com a fixação destes valores mostraram que há certa faixa de segurança para a escolha da assíntota e que valores dentro desta faixa provocam pequena alteração nos resultados.

Foi escolhido o valor a = 3.600 como o mais adequado para ambas as funções. Os resultados encontram-se nas Tabelas 1 e 2 e na Fig. 1.

A constatação de seqüências de resíduos com o mesmo sinal é mais acentuada na curva logística que em Gompertz. O ajuste por esta proporcionado é mais eficiente, o que pode ser comprovado pelas menores percentagens de erro, pela análise de variância (valores de F) e pela dispersão dos pontos em torno da curva ajustada (Fig. 1).

A curva logística superestima os dois pontos iniciais, o contrário ocorrendo para os valores correspondentes às idades de 28 e 56 dias, cujas percentagens de erro são as mais elevadas.

Para coelhos Califórnia foram consideradas as assíntotas a = 3.100, a = 3.000 e a = 2.900. Os resultados encontram-se nas Tabelas 1 e 3 e Fig. 2.

A eficiência dos ajustes pode ser vista observando-se a dispersão dos valores observados ao redor da curva estimada (Fig. 2), pelas percentagens de erro das estimativas (Tabela 3) e pela análise de variância e coeficientes de determinação (Tabela 1). O ajuste proporcionado pela Gompertz foi mais eficiente que o da logística. Nesta, a tendência temporal de resíduos com o mesmo sinal foi mais acentuada.

Para coelhos Nova-Zelândia foram estudadas as assíntotas a = 3.200, a = 3.100 e a = 3.000. Para o ajuste da função de Gompertz, a escolha recaiu em a = 3.200, e para a logística, em a = 3.000. Os resultados encontram-se nas Tabelas 1 e 4 e Fig. 3, evidenciando, mais uma vez, o melhor desempenho da função de Gompertz.

O ajuste de curvas de crescimento, além do interesse biológico, apresenta uma grande importância de natureza econômica, como, por exemplo, na determinação da idade econômica de abate. Dada a importância destes ajustes e do progresso computacional, o interesse na simulação do peso corporal tem aumentado bastante. Por outro lado, a dificuldade de utilização de computadores por pequenos produtores limita muito o uso de tais processos, exatamente onde eles seriam mais útèis.

Na criação de pequenos animais de valor econômico, um dos principais interesses na simulação do crescimento, usando-se modelos matemáticos, está centrado em estimar o peso vivo a uma determinada idade, verificar a taxa de ganho de peso nas diferentes idades e em comparar curvas de crescimento usando-se diferentes rações e/ou tratamentos.

O estudo comparativo das curvas de Gompertz e logística, ajustadas pelo método aproximado proposto, pode ser facilmente executado, com a utilização de máquinas simples de cálculo.

Confrontando-se os valores observados e os esperados, verifica-se que houve uma tendência temporal mais acentuada com a utilização da função logística, com resíduos mais elevados no intervalo de 28 a 56 dias (subestimando o esperado) e com superestimativa nos dias iniciais de pesagem, onde ocorreram as maiores percentagens de erro. Por outro lado, com o uso da função de Gompertz, a tendência temporal de seqüências de resíduos de mesmo sinal foi menos acentuada, com subestimativas dos valores esperados no intervalo inicial de 1 a 14 dias, no qual ocorreram as maiores percentagens de erro.

Os ajustes com a função de Gompertz foram mais eficientes quando se fixou a assíntota horizontal com base no maior valor individual de peso,

TABELA 1. Peso corporal de coelhos: regressão linear estimada, coeficiente de determinação, análise de variância para verificar o ajuste linear (ANOVA), equação estimada da curva de crescimento, ponto de inflexão e equação da velocidade do ganho de peso, para as raças Norfolk, Califórnia e Nova-Zelândia, utilizando-se as funções de Gompertz e logística.

Raça	Estimativas	Gompertz com a = 3.600	Logística com a = 3.600
Norfolk	Equação linear	$\hat{y}_i = 1,4904 - 0,034.X_i$	$\hat{y}_i = 3,1667 - 0,0556.X_i$
	Coef. determinação	$r^2 = 0,9855$	$r^2 = 0,9803$
	ANOVA regressão	$F = 1087,45$ ($p < 0,0001$)	$F = 795,94$ ($p < 0,0001$)
	Equação da curva	$\hat{y}_i = 3600 . 0,0118^{0,9672^{X_i}}$	$\hat{y}_i = 3600/(1 + 23,7290 . 0,9507^{X_i})$
	Ponto de inflexão	(45; 1324)	(63; 18000)
	Eq. da velocidade	$v_i = 533,02 . 0,9672^{X_i} . 0,0118^{0,9672^{X_i}}$	$v_i = 4318,78 . 0,9507^{X_i}/(1 + 23,7290 . 0,9507^{X_i})^2$
		a = 3100	a = 2900
Califórnia	Equação linear	$\hat{y}_i = 1,2734 - 0,0299 . X_i$	$\hat{y}_i = 2,8759 - 0,0515\ X_i$
	Coef. determinação	$r^2 = 0,9964$	$r^2 = 0,9843$
	ANOVA regressão	$F = 4390,92$ ($p < 0,0001$)	$F = 1002,39$ ($p < 0,0001$)
	Equação da curva	$\hat{y}_i = 3100 . 0,0281^{0,9705^{X_i}}$	$\hat{y}_i = 2900/1(1 + 17,7414 . 0,9498^{X_i})$
	Ponto de inflexão	(43; 1140)	(56; 1450)
	Eq. da velocidade	$v_i = 331,57 . 0,9705^{X_i} . 0,0281^{0,9705^{X_i}}$	$v_i = 2649,88 . 0,9498^{X_i}/(1 + 17,7414 . 0,9498^{X_i})^2$
		a = 3200	a = 3100
Nova-Zelândia	Equação linear	$\hat{y}_i = 1,4253 - 0,0317 . X_i$	$\hat{y}_i = 3,1286 - 0,0515 . X_i$
	Coef. determinação	$r^2 = 0,9950$	$r^2 = 0,9856$
	ANOVA regressão	$F = 3197,00$ ($p < 0,0001$)	$F = 1095,89$ ($p < 0,0001$)
	Equação da curva	$\hat{y}_i = 3200 . 0,0156^{0,9688^{X_i}}$	$\hat{y}_i = 3100/(1 + 22,8420 . 0,9498^{X_i})$
	Ponto de inflexão	(45; 1177)	(61; 1550)
	Eq. da velocidade	$v_i = 422,00 . 0,9688^{X_i} . 0,01556^{0,9688^{X_i}}$	$v_i = 3646,99 . 0,9498^{X_i}/(1 + 22,8420 . 0,9498^{X_i})^2$

TABELA 2. Peso corporal de coelhos Norfolk: idade em dias (X_i), peso observado (y_i), valor transformado (y_i), valor estimado pela regressão linear ($\hat{y}_i$), peso estimado pela curva de crescimento ($\hat{y}_i$) e percentagem de erro da estimativa ($(y_i - \hat{y}_i) \cdot 100/y_i$), obtidos com o uso das funções de Gompertz e logística.

Idade X_i	y_i Obs.	Gompertz com a = 3.600 y_i Transf.	$\hat{y}_i$ Estim.	$\hat{y}_i$ Estim.	$(y_i - \hat{y}_i) \cdot 100 / y_i$	Logística com a = 3.600 y_i Transf.	$\hat{y}_i$ Estim.	$\hat{y}_i$ Estim.	$(y_i - \hat{y}_i) \cdot 100 / y_i$
1	73,53	1,36	1,46	49,14	33,17	3,87	3,12	152,81	-107,82
7	175,32	1,11	1,26	107,06	38,93	2,97	2,81	203,90	-16,30
14	281,23	0,94	1,02	222,58	20,85	2,47	2,46	283,66	-0,86
21	397,95	0,79	0,79	397,34	0,15	2,09	2,10	391,02	1,74
28	623,75	0,56	0,56	628,70	-0,79	1,56	1,75	532,49	14,63
35	930,25	0,30	0,32	904,13	2,81	1,05	1,40	713,76	23,27
42	1.215,90	0,08	0,09	1.205,50	0,86	0,67	1,04	937,87	22,87
49	1.471,77	-0,11	-0,15	1.513,88	-2,86	0,37	0,69	1.203,02	18,26
56	1.674,15	-0,27	-0,38	1.813,09	-8,30	0,14	0,33	1.500,87	10,35
63	1.928,46	-0,47	-0,61	2.091,41	-8,45	-0,14	-0,02	1.816,58	5,80
70	2.206,00	-0,71	-0,85	2.341,78	-6,16	-0,46	-0,38	2.131,27	3,38
77	2.417,00	-0,92	-1,08	2.561,12	-5,96	-0,71	-0,73	2.426,31	-0,39
84	2.620,00	-1,15	-1,32	2.749,27	-4,93	-0,98	-1,08	2.687,46	-2,57
91	2.804,00	-1,39	-1,55	2.908,00	-3,71	-1,26	-1,44	2.907,09	-3,68
98	3.007,00	-1,71	-1,78	3.040,16	-1,10	-1,62	-1,79	3.084,00	-2,56
105	3.148,00	-2,01	-2,02	3.149,05	-0,03	-1,94	-2,15	3.221,64	-2,34
112	3.356,67	-2,66	-2,25	3.238,03	3,53	-2,62	-2,50	3.325,82	0,92
119	3.363,33	-2,69	-2,48	3.310,27	1,58	-2,65	-2,85	3.403,07	-1,18

na idade final. Para a logística, os melhores ajustes ocorreram quando a assíntota foi baseada no valor médio do peso final.

Para os dois tipos de equações empregados, o confronto entre os valores estimados e os obtidos com os três valores fixados para a assíntota evidenciou que as maiores diferenças entre as estimativas ocorreram nas idades iniciais (até 14 dias). Nas demais idades, a concordância foi boa. Portanto, pequenas variações no valor da assíntota não implicam maiores repercussões nas equações ajustadas. Esta é uma constatação prática importante que reforça a utilidade do uso do processo aproximado de ajuste por pessoas que não dispõem de computadores, necessários quando do emprego dos métodos iterativos.

No Brasil, os coelhos são geralmente abatidos com peso vivo entre 2,0 e 2,5 kg (idade provável de 63 a 84 dias para a raça Califórnia e Nova-Zelândia). Para estas idades, as percentagens de erro dos valores estimados foram sempre menores na Gompertz que na logística.

As determinações da equação da velocidade do ganho de peso em função da idade e do ponto de inflexão (onde a velocidade do ganho de peso é máxima) mostraram que, usando-se a função de Gompertz, o ganho máximo de peso para as três raças ocorreu em idades entre 43 e 45 dias; e usando-se a logística, em idades entre 56 e 63 dias. Estes últimos valores são muito próximos da idade de abate comercial. Na função logística, o ponto de inflexão corresponde a um peso exatamente igual à metade do valor da assíntota, e a curva apresenta simetria radial, em relação a esse ponto, o que constitui uma característica muito rígida da curva logística, pois implicaria supor que as forças que atuam no sentido de inibir a taxa de ganho de peso além do ponto de inflexão são iguais em magnitude e distribuídas de maneira similar às forças que atuam para acelerar o crescimento antes da idade correspondente à do ponto de inflexão. Na maioria dos processos de crescimento, no entanto, tal característica não ocorre, o que tornaria a função logística menos coerente, do ponto de vista biológico.

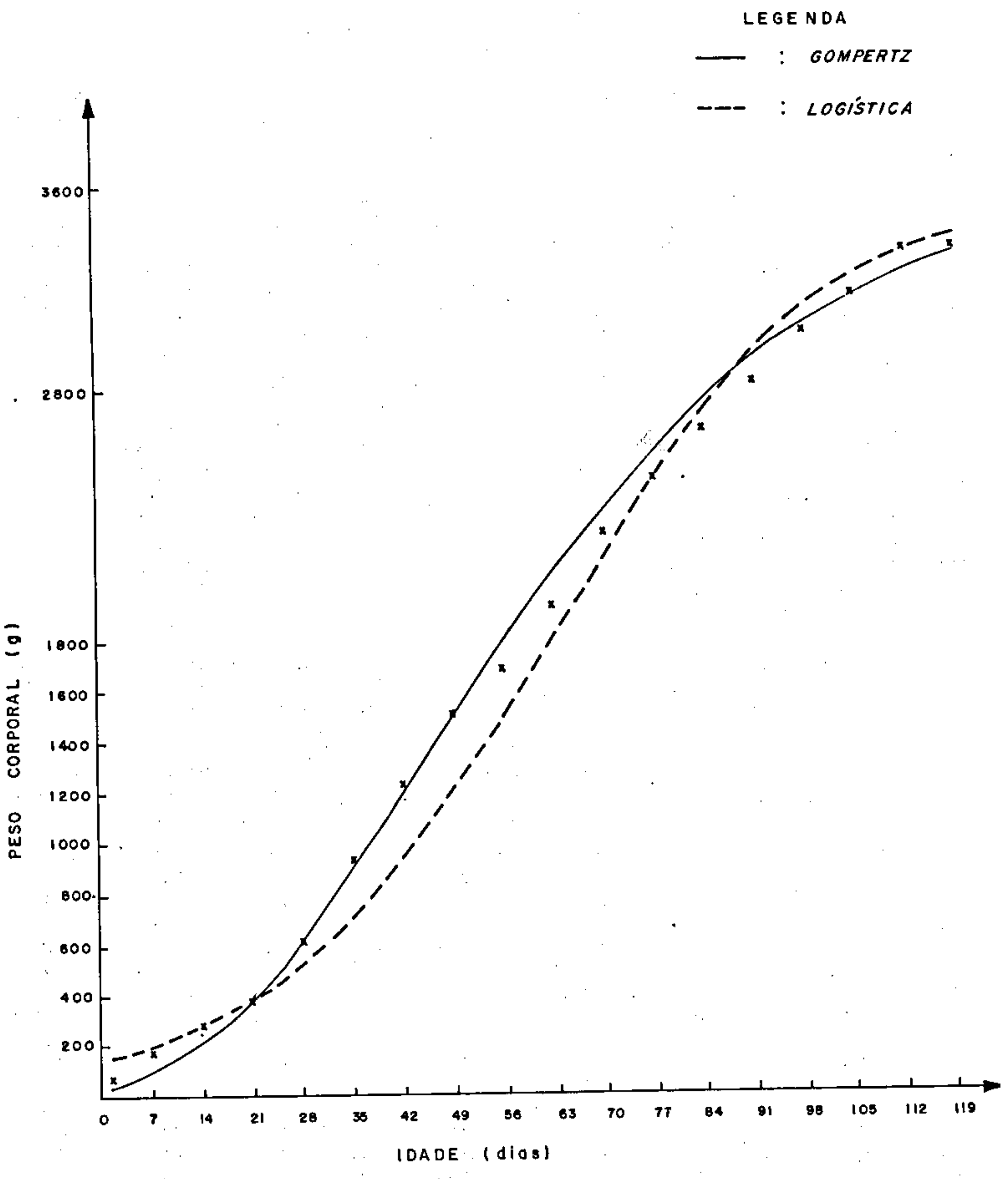

FIG. 1. Curvas de Gompertz e logística ajustadas com a = 3.600 e valores observados do peso corporal (em gramas) de coelhos da raça norfolk.

TABELA 3. Peso corporal de coelhos Califórnia: idade em dias (X_i), peso observado (y_i), valor transformado (y_i), valor estimado pela regressão linear ($\hat{y}_i$), peso estimado pela curva de crescimento ($\hat{y}_i$) e percentagem de erro da estimativa ($(y_i - \hat{y}_i) \cdot 100/y_i$), obtidos com o uso das funções de Gompertz e logística.

Idade X_i	y_i Obs.	Gompertz com a = 3.100 y_i Transf.	$\hat{y}_i$ Estim.	$\hat{y}_i$ Estim.	$\frac{(y_i - \hat{y}_i) \cdot 100}{y_i}$	y_i Transf.	Logística com a = 2.900 $\hat{y}_i$ Estim.	$\hat{y}_i$ Estim.	$\frac{(y_i - \hat{y}_i) \cdot 100}{y_i}$
1	87,35	1,2724	1,2435	96,79	10,81	3,47	2,82	162,46	-85,99
7	183,70	1,0388	1,0641	171,16	6,83	2,69	2,52	216,88	-18,06
14	284,80	0,8702	0,8548	296,00	- 3,93	2,22	2,15	301,25	- 5,78
21	406,20	0,7092	0,6455	461,51	-13,62	1,81	1,79	413,38	- 1,77
28	643,90	0,4521	0,4362	661,60	- 2,75	1,25	1,43	558,28	13,30
35	918,40	0,1960	0,2269	886,01	3,53	0,77	1,07	738,87	19,55
42	1.156,00	-0,0137	0,0176	1.122,77	2,87	0,41	0,71	954,09	17,47
49	1.424,00	-0,2511	-0,1917	1.360,50	4,46	0,04	0,35	1.197,26	15,92
56	1.608,00	-0,4210	-0,4010	1.589,76	1,13	-0,22	-0,01	1.456,03	9,45
63	1.725,00	-0,5440	-0,6103	1.803,74	- 3,96	-0,51	-0,37	1.714,42	1,19
70	1.905,00	-0,7197	-0,8196	1.998,24	- 4,89	-0,65	-0,73	1.956,54	- 2,71
77	2.264,00	-1,1575	-1,0289	2.171,26	4,10	-1,27	-1,09	2.170,25	4,14
84	2.316,00	-1,2325	-1,2382	2.322,50	- 0,28	-1,38	-1,45	2.349,19	- 1,43
91	2.438,00	-1,4262	-1,4475	2.452,84	- 0,61	-1,66	-1,81	2.492,48	- 2,23
98	2.587,00	-1,7098	-1,6568	2.563,89	0,89	-2,11	-2,17	2.603,21	- 6,27
105	2.694,00	-1,9634	-1,8661	2.657,62	1,35	-2,57	-2,53	2.686,43	0,28
112	2.727,00	-2,0542	-2,0754	2.736,13	-0,33	-2,76	-2,89	2.747,68	- 0,76
119	2.758,00	-2,1465	-2,2847	2.801,50	-1,58	-2,97	-3,25	2.792,07	-1,24

TABELA 4. Peso corporal de coelhos Nova-Zelândia: idade em dias (X_i), peso observado (y_i), valor transformado (y_i), valor estimado pela regressão linear ($\hat{y}_i$), peso estimado pela curva de crescimento ($\hat{y}_i$) e percentagem de erro da estimativa ($((y_i - \hat{y}_i) \cdot 100/y_i$), obtidos com o uso das funções de Gompertz e logística.

Idade X_i	y_i Obs.	Gompertz com a = 3.200 y_i Transf.	$\hat{y}_i$ Estim.	$\hat{y}_i$ Estim.	$\frac{(y_i - \hat{y}_i) \cdot 100}{y_i}$	y_i Transf.	Logística com a = 3.100 $\hat{y}_i$ Estim.	$\hat{y}_i$ Estim.	$\frac{(y_i - \hat{y}_i) \cdot 100}{y_i}$
1	73,38	1,31	1,39	56,84	22,54	3,65	3,08	93,79	-27,81
7	145,60	1,13	1,20	114,24	21,54	3,01	2,77	183,13	-25,78
14	251,10	0,98	0,98	221,73	11,70	2,43	2,41	256,06	- 1,98
21	351,40	0,79	0,76	377,15	- 7,33	2,06	2,05	354,50	- 0,88
28	551,80	0,56	0,56	577,17	- 4,60	1,53	1,69	484,34	12,23
35	818,20	0,31	0,32	811,56	0,81	1,03	1,33	650,46	20,50
42	1.090,10	0,07	0,09	1.066,31	2,18	0,61	0,97	854,95	21,57
49	1.348,40	-0,15	0,13	1.326,95	1,59	0,26	0,61	1.094,98	18,79
56	1.572,10	-0,34	-0,35	1.580,98	- 0,56	-0,03	0,24	1.361,54	13,39
63	1.649,00	-0,41	-0,57	1.819,12	-10,32	-0,13	-0,12	1.639,91	0,55
70	1.971,00	-0,72	-0,79	2.035,50	- 3,27	-0,56	-0,48	1.912,58	2,96
77	2.151,00	-0,92	-1,02	2.227,24	- 3,54	-0,82	-0,84	2.163,41	- 0,58
84	2.331,00	-1,15	-1,24	2.393,78	- 2,69	-1,11	-1,20	2.381,17	- 2,15
91	2.472,00	-1,35	-1,46	2.536,12	- 2,59	-1,37	-1,56	2.560,92	- 3,60
98	2.645,00	-1,66	-1,68	2.656,22	- 0,42	-1,76	-1,92	2.703,21	- 2,20
105	2.779,00	-1,96	-1,90	2.756,51	0,81	-2,16	-2,28	2.812,16	- 1,19
112	2.886,00	-2,27	-2,13	2.839,57	1,61	-2,60	-2,64	2.893,48	- 0,26
119	2.944,00	-2,48	-2,35	2.907,90	1,23	-2,94	-3,00	2.953,03	- 0,31

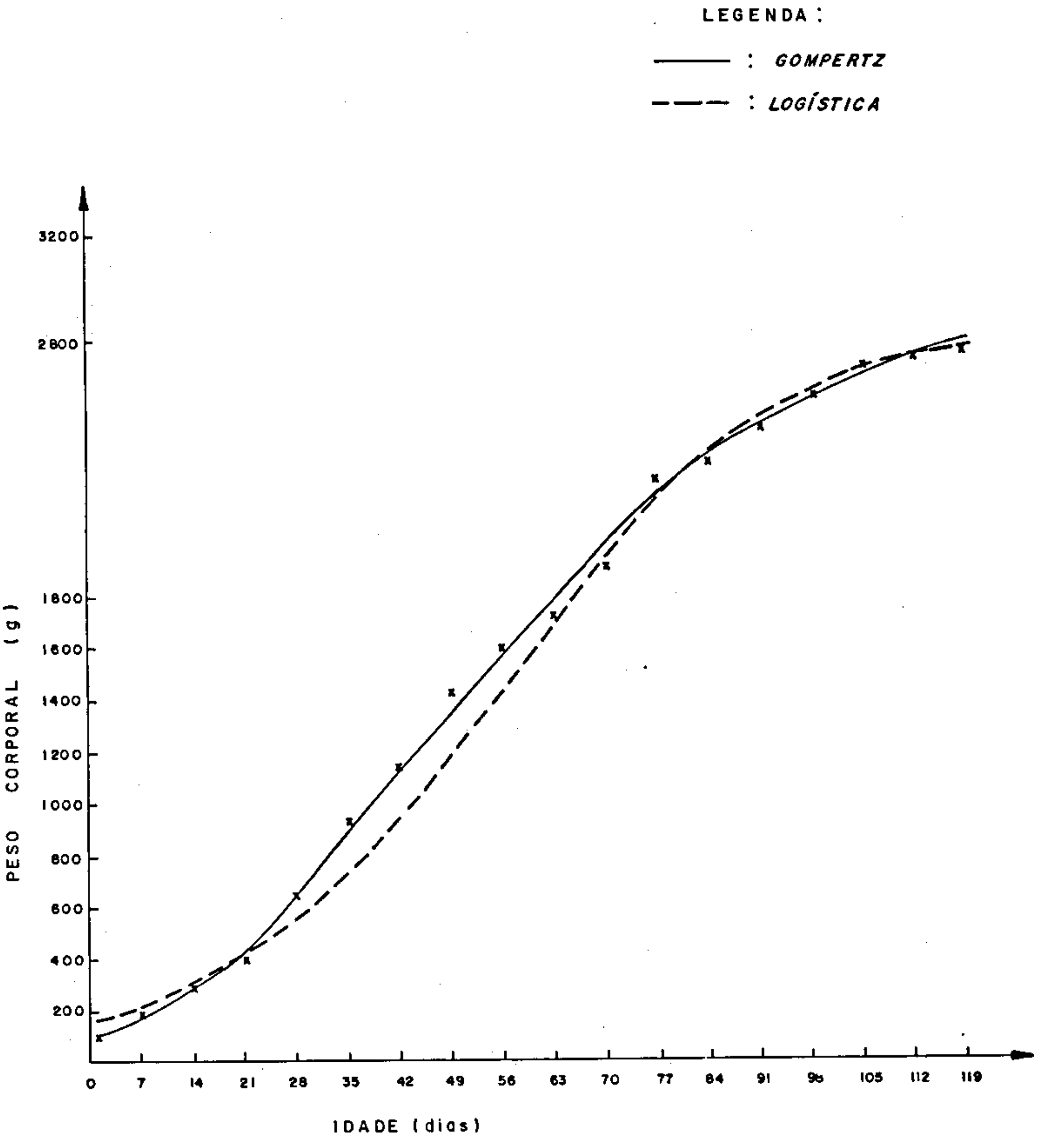

FIG. 2. Curva de Gompertz ajustada com a = 3.100, e curva logística com a = 2.900 e valores observados do peso corporal (em gramas) de coelhos califórnia.

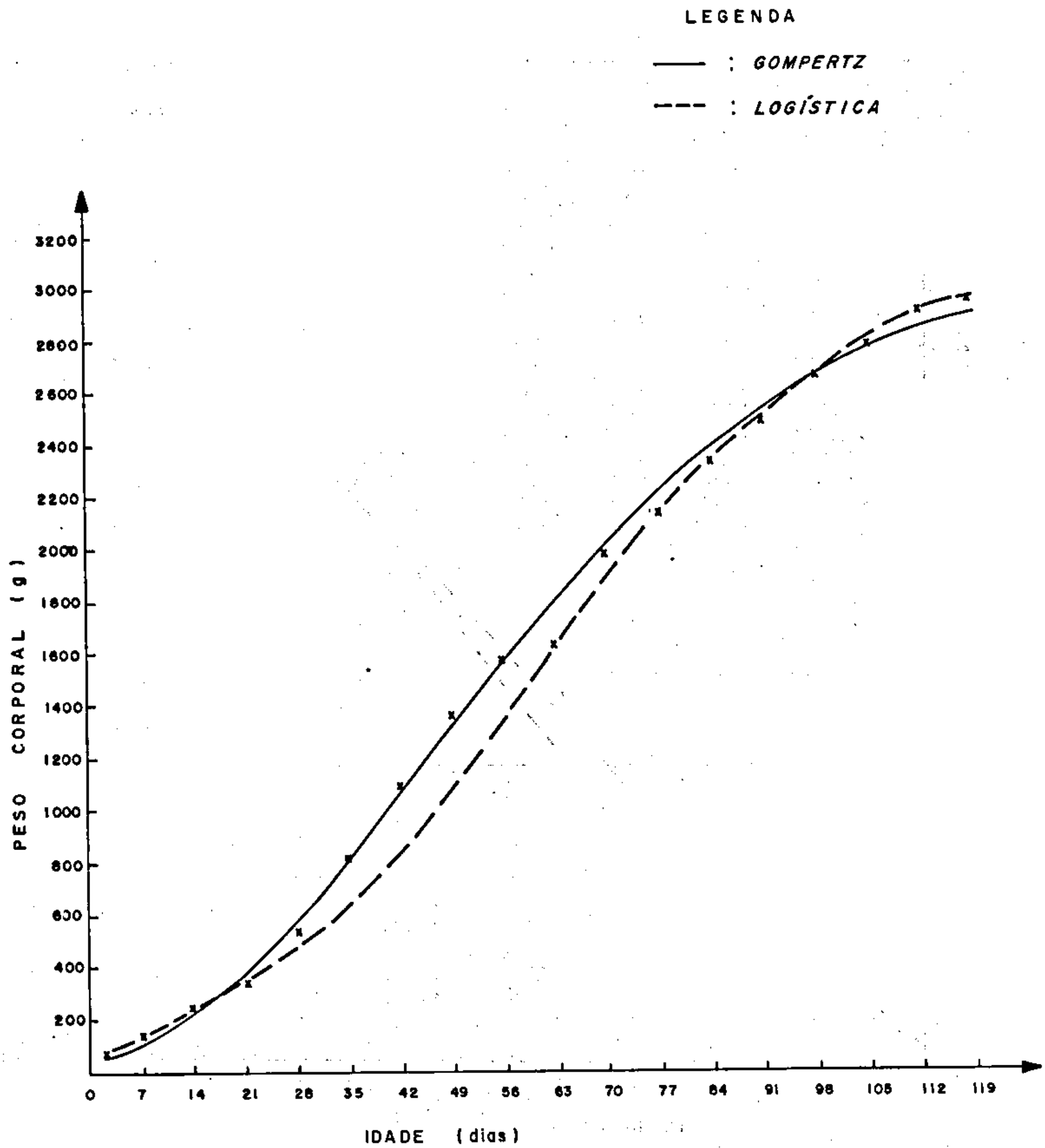

FIG. 3. Curva de Gompertz ajustada com a = 3.200, curva logística ajustada com a = 3.100 e valores observados do peso corporal (em gramas) em coelhos nova-zelândia.

CONCLUSÕES

1. De maneira geral, os ajustes obtidos com a utilização da função de Gompertz foram mais eficientes que os obtidos com a função logística.

2. Para o uso do método aproximado proposto, a fixação da assíntota horizontal pode ser feita com base no maior valor individual de peso verificado no último dia de medida quando se utilizar a função de Gompertz, e com base no valor médio de peso obtido no último dia de medida quando a logística for usada.

3. A boa concordância verificada entre as curvas ajustadas com a fixação de diferentes valores para a assíntota horizontal (dentro de certa faixa); a facilidade de obtenção dos parâmetros da regressão linear resultante após a transformação da variável dependente; e a boa concordância entre os valores observados e os esperados usando-se a curva obtida com o método aproximado, justificam sua utilização, principalmente quando não houver disponibilidade de computadores para o cálculo dos parâmetros pelos métodos iterativos.

4. O método aproximado pode ser utilizado pelos criadores: para a visualização do crescimento corporal com a idade; para a determinação das taxas de ganho de peso, o que permite discutir a época mais conveniente para o abate comercial dos animais; para estimativas de conversão alimentar; para a determinação de padrões de crescimento; para a seleção de novas linhagens; e para comparações entre um crescimento controle e o crescimento proporcionado por outros tratamentos.

REFERÊNCIAS

CROXTON, F.E. & COWDEN, D.J. Applied general statistics. 2. ed. New York, Prentice-Hall, 1955.

MISCHAN, M.M. & CURI, P.R. Uma aproximação a ajustamento de funções assintóticas a dados de crescimento. In: REUNIÃO ANUAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA PARA O PROGRESSO DA CIÊNCIA, 32. Anais ... s.l., s.ed., 1980.

NELDER, J.A. The fitting of a generalization of the logistic curve. Biometrics, 17:89-110, 1961.

RAO, D.R.; SUNKI, G.R.; JOHNSON, W.M. & CHEN, C.P. Postnatal growth of New Zealand white rabbit. J. Anim. Sci., 44(6):1021-5, 1977.

SANTOS, E.P. Dinâmica de populações aplicada à pesca e piscicultura. S. Paulo, Hucitec, 1978.

STEVENS, W.L. Asymptotic regression. Biometrics, 7:247-67, 1951.

VIEIRA, S. & MISCHAN, M.M. A logística e a Gompertz; duas funções alternativas no estudo de dados de crescimento. Ci. e Cult., 28(8):950-2, 1976.