

MODELO MATEMÁTICO DA IRRIGAÇÃO POR SULCOS¹

FRANCISCO DE SOUZA²

RESUMO - O modelo matemático da irrigação por sulcos aqui apresentado, podendo ser usado para analisar e prever a eficiência de um sistema de irrigação por sulcos abertos em declive. A análise é baseada na solução das equações de conservação de massa e quantidade de movimento, as quais governam o fluxo de água em canais em regime não-permanente e variado. Este modelo é classificado como modelo hidrodinâmico. O presente trabalho demonstra, também, que condições de zero-inércia (aceleração da água desprezível) podem ocorrer na irrigação por sulcos. Os dados requeridos para o modelo são: vazão de entrada, declive do sulco, o tempo de aplicação da água, o comprimento do sulco, o coeficiente de rugosidade de Manning, parâmetros de infiltração do solo (as constantes K e a da equação de Kostikov) e a forma do sulco. Os resultados do modelo (uma completa irrigação por sulcos simulada pelo computador) consistem de: curvas de avanço e recessão, distribuição da água infiltrada ao longo do sulco, volume drenado ao final do sulco e eficiência de aplicação e armazenamento. Análise dimensional foi usada para reduzir o número de parâmetros que governam as equações. O desempenho do modelo foi avaliado pela comparação com dados de campo. Os resultados mostraram que o modelo simula satisfatoriamente a irrigação por sulcos.

Termos para indexação: modelo hidrodinâmico, regime não-permanente e não-uniforme.

MATHEMATICAL MODEL OF FURROW IRRIGATION

ABSTRACT - A mathematical model of furrow irrigation is presented herein. The model can be used to analyse and predict the efficiency of a sloping, open furrow irrigation system. This analysis is based upon the solution of the mass and momentum conservation equations, which govern the unsteady, nonuniform, varied flow of water in open channel flow. Consequently, the model is called a hydrodynamic model. In addition, this paper shows that zero-inertia conditions can occur in furrow irrigation. Model input comprises the inflow discharge, furrow slope, cutoff time, furrow length, Manning roughness, infiltration parameters (K and a in Kostikov equation), and furrow geometry. The output consists of: advance and recession curves, spatial distribution of water after irrigation, runoff volume, and application and storage efficiency. Dimensional analysis is used to reduce the number of parameters which govern the equations. Model performance is evaluated by comparison with field data, and the results show that the model predicts furrow irrigation satisfactorily.

Index terms: hydrodynamic model, unsteady non-uniform flow.

INTRODUÇÃO

Na última década, vários modelos matemáticos têm sido aplicados para descrever e analisar a irrigação superficial. Estes modelos variam em complexidade desde simples modelos algébricos, baseados no princípio da conservação de massa, até modelos hidrodinâmicos, os quais consistem na solução das equações de Saint-Venant que governam o fluxo de água em canais em regime não-permanente e variado. Strelkoff & Katopodes (1977) propuseram um modelo baseado na hipótese de que a aceleração da água pode ser considerada nula, ao qual denominaram zero-inércia.

Uma característica comum de tais modelos é que eles foram aplicados somente ao método de irrigação por inundação, também denominado tabuleiros retangulares (Olitta 1977) ou diques em declive (Daker 1973). Neste método, o terreno é dividido em parcelas ou faixas estreitas e compridas, separadas por meio de diques. A água é aplicada na cabeceira da parcela e avança na forma de lâmina no sentido do declive do terreno, ao mesmo tempo em que infiltra no solo na direção vertical.

A análise da hidráulica da irrigação por sulcos é mais complexa do que aquela da irrigação por inundação. Na irrigação por sulcos, uma vazão geralmente constante é aduzida a pequenos canais (sulcos ou corrugações), cujo tamanho e forma variam de acordo com a cultura. Do mesmo modo que na irrigação por inundação, a irrigação por sulcos consiste basicamente de quatro fases: avanço, armazenamento, depleção e recessão. A fase de avanço caracteriza-se pelo movimento da água na

¹ Aceito para publicação em 21 de maio de 1984

² Eng. Agrícola, Ph.D., Prof.-Adj. UFCE/Engenharia Agrícola, e Pesquisador do CNPq - CEP 60000 Fortaleza, CE.

superfície do solo, no sentido do declive, e termina quando a água atinge o final do sulco; neste momento, se o sulco não for fechado ao final, começam as perdas d'água por escoamento superficial ("runoff"). Se a adução de água é continuada, o sulco se mantém coberto por uma lâmina d'água em toda a extensão, iniciando-se a fase de armazenamento. No momento em que a adução cessa, inicia a fase de depleção; a lâmina d'água na cabeceira do sulco começa a decrescer até o seu desaparecimento total, o que marca o início da fase de recessão. Esta termina quando toda a água desaparece da superfície do solo. Na maioria das vezes, a fase de recessão é muito pequena com a água desaparecendo quase que instantaneamente. Durante todas essas fases do processo de irrigação por sulcos, a água infiltra horizontalmente através das paredes laterais, bem como verticalmente através do fundo do sulco; a lâmina d'água, por sua vez, varia com a distância ao longo do sulco e com o tempo e, conseqüentemente, a infiltração da água no solo é também uma função do tempo e da lâmina de água.

Até a presente data, um modelo hidrodinâmico completo da irrigação por sulcos não foi ainda desenvolvido, o que se deve à complexidade em relacionar matematicamente a função de infiltração do solo com a geometria do sulco. Duas tentativas de desenvolvimento de um modelo de irrigação por sulcos não conduziram a resultados satisfatórios (Davis 1960 e Wilke 1968). Contudo, a elaboração de projetos e a operação de sistemas de irrigação por sulcos com alta eficiência podem ser extremamente facilitadas no momento em que as variáveis que governam o fenômeno e suas relações, sejam conhecidas desde um ponto de vista científico. Isto pode ser realizado pelo desenvolvimento de um modelo hidrodinâmico.

Os objetivos do presente trabalho são:

1. Desenvolver um modelo hidrodinâmico, não-linear, para sulcos com drenagem livre, através da solução das equações de conservação de massa e quantidade de movimento, as quais relacionam a altura da lâmina e a velocidade da água em condutos livres ou canais. Esse modelo deverá ter a capacidade de prever as curvas de avanço e recessão bem como a eficiência e uniformidade de distribuição da água infiltrada no solo.

2 Testar a validade da hipótese de zero-inércia na irrigação por sulcos.

METODOLOGIA

O modelo matemático para a irrigação por sulcos aqui apresentado é baseado na solução de duas equações diferenciais parciais que governam o fluxo de água em regime não-permanente e variado, conhecidas pelo nome de equações de Saint-Venant. Estas equações são classificadas como não-lineares do tipo hiperbólico.

Uma das equações é originária da aplicação do princípio de conservação de massa (também conhecida como equação da continuidade) e é representada por:

$$\frac{\partial Q}{\partial X} + \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A_z}{\partial t} = 0 \quad (01)$$

enquanto a outra expressa o princípio da conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} \left(P + \frac{Q^2}{Ag} \right) = AS_0 - D - AD_1 \quad (02)$$

Nas equações (01) e (02), $Q(x, t)$ = vazão e $y(x, t)$ = altura da lâmina d'água no sulco são as variáveis dependentes; x = distância ao longo do sulco e t = tempo são as variáveis independentes; $A(y)$ = área molhada ou seção de escoamento; $A_z(y)$ = volume infiltrado por unidade de comprimento do sulco (unidades de área); S_0 = declividade do sulco; $D = S_f \cdot A$, força de resistência; $S_f(Q, y)$ = declividade da linha de energia; $P(y)$ = força de pressão por δ ; δ = peso específico da água; D_1 = efeito dinâmico da infiltração; g = aceleração da gravidade. Uma completa e detalhada derivação das equações (01) e (02) pode ser encontrada em Chow (1959), Henderson (1966) e Strelkoff (1970); por isso, não será apresentada neste trabalho.

A declividade da linha de energia é calculada pela equação de Manning:

$$S_f = \frac{Q | Q | n^2}{C_u^2 A^2 R^{4/3}} \quad (03)$$

na qual $R = A/P_m$, é o raio hidráulico; P_m = perímetro molhado; n = coeficiente de rugosidade de Manning; C_u = coeficiente de conversão de unidade ($C_u = 1,0$ no sistema métrico e $C_u = 1,486$ no sistema inglês).

O volume infiltrado por unidade de comprimento do sulco, A_z , é determinado pela seguinte equação (Souza 1981):

$$A_z(y, t) = P_m(y) \cdot z(\tau) \quad (04)$$

onde $z(\tau)$ é o volume infiltrado por unidade de área, computado pela equação de Kostikov:

$$z(\tau) = K \tau^a \quad (05)$$

Na equação (05), τ = tempo de infiltração; K = lâmina de infiltração no tempo unitário; a = expoente adimensional.

Para o cálculo do termo dinâmico da infiltração, a expressão dada por Strelkoff (1970) é usada:

$$D_1 = \frac{v \frac{\partial A_z}{\partial t}}{2 Ag} \quad (06)$$

onde $v = Q/A$ é a velocidade da água.

No presente modelo considera-se que o sulco é de forma parabólica, definido pela equação:

$$B = Cy^M \quad (07)$$

na qual B é a largura do sulco na superfície livre da água, e C e M são duas constantes. M é um fator de forma que pode representar a seção retangular, a seção parabólica convexa ou a seção triangular ($M = 0$, $0 < M < 1$, e $M = 1$, respectivamente).

A área molhada é dada pela integral da equação (07).

$$A = \frac{By}{M+1} \quad (08)$$

enquanto o perímetro molhado é calculado pela integração numérica da seguinte expressão:

$$P_m = 2 \int \left\{ 1 + \left(\frac{MB}{2y} \right)^2 \right\}^{1/2} dy \quad (09)$$

As formas adimensionais das equações básicas do presente modelo (equações 01 e 02) podem ser obtidas pela introdução de variáveis características do fluxo. O uso da análise dimensional, neste caso, tem por objetivo reduzir o número de parâmetros envolvidos nas equações e, portanto, facilitar pesquisas futuras.

Seja Q_c , T , X , Y e Z variáveis características do fluxo de água em sulco; então, algumas variáveis adimensionais (representadas aqui por letras com um asterisco) podem ser definidas, como segue:

$$\begin{aligned} Q^* &= \frac{Q}{Q_c}; \quad x^* = \frac{x}{X}; \quad y^* = \frac{y}{Y}; \quad B^* = \frac{B}{Y}; \quad P^* = \frac{P}{Y^3}; \quad A^* = \frac{A}{Y^2} \\ P_m^* &= \frac{P_m}{Y}; \quad R^* = \frac{R}{Y}; \quad x^* = \frac{z}{Z}; \quad t^* = \frac{t}{T}; \quad \tau^* = \frac{\tau}{T} \\ A_z^* &= \frac{A_z}{Z Y}; \quad Q_{in}^* = \frac{Q_{in}}{Q_c}; \quad v^* = \frac{v}{V} \end{aligned} \quad (10)$$

Se as variáveis adimensionais definidas na equação (10) forem substituídas nas equações (01) e (02), o que resulta são as formas adimensionais das equações de continuidade e quantidade de movimento, ou seja:

$$\frac{\partial Q^*}{\partial x^*} + \frac{\partial A^*}{\partial t^*} + K^* \frac{\partial A^*}{\partial t^*} = 0 \quad (11)$$

$$F^{*2} \left\{ \frac{\partial Q^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(Q^*/A^*)}{\partial x^*} + \frac{v^* K^*}{2} \frac{\partial A_z^*}{\partial t^*} \right\} + \frac{\partial P^*}{\partial x^*} = \quad (12)$$

$$A^* (1 - K_s^* S_f^*)$$

Nas equações (11) e (12), os seguintes parâmetros necessitam ser definidos:

$$K^* = \frac{Z}{Y_n}$$

$$e \quad K_s^* = \frac{A_n^2 R_n^{4/3}}{y_n^4 y_n^{4/3}} \quad (13)$$

$$F^{*2} = \frac{Q_c^2}{g Y_n^5}$$

F^* é o número de Froude. Strelkoff & Katopodes (1977) mostraram que condições de zero-inércia existem quando o número de Froude é próximo a zero. Portanto, se se fizer $F^* = 0$ na equação (12), o resultado será a equação de quantidade de movimento para condições de zero-inércia.

$$\frac{\partial P^*}{\partial X^*} = A^* (1 - K_s^* S_{f^*}) \quad (14)$$

Em resumo, dois tipos de modelo para a irrigação por sulco são aqui apresentados: (a) um modelo hidrodinâmico que é descrito pelas equações (11) e (12); e (b) um modelo zero-inércia (no qual os termos de aceleração são desprezados pelo estabelecimento de $F^* = 0$), que é gover-

nado pelas equações (11) e (14). Agora, o que resta é apresentar, sucintamente, o método de solução das equações.

A solução de equações diferenciais parciais requer o estabelecimento de condições iniciais e de fronteira, que serão, aqui, apresentadas apenas para as equações dimensionais. Para uma irrigação por sulcos completa, as equações (01) e (02) requerem as seguintes condições iniciais e de fronteira na cabeceira do sulco (condições a montante):

$$\begin{aligned} Q &= 0; y = 0 & t < 0 \\ Q &= Q_{en} & 0 < t < t_{co} \\ Q &= 0 & t > t_{co} \end{aligned} \quad (15)$$

onde t_{co} é o tempo de aplicação da água.

Durante a fase de avanço, as condições de fronteira a jusante são:

$$y = 0; Q = 0 \quad x = x_A < L \quad (16)$$

onde x_A é a última estação para a qual a água avançou. Após a chegada da frente de avanço ao final do sulco, tem início a drenagem superficial ("runoff"). A condição de fronteira, neste caso, deve ser uma relação entre a vazão de drenagem e a lâmina de água no final do sulco. Seguindo normas estabelecidas por Bassett & Fitzsimmons (1976), faz-se a hipótese de que, ao deixar o sulco, o fluxo de água continua sobre uma superfície com declive e rugosidade iguais à do sulco, e que, além do mais, o movimento d'água é uniforme. Assim, a equação de Manning pode ser usada para suprir a necessária relação vazão-lâmina d'água mencionada anteriormente, isto é:

$$Q_{ro} = \frac{C_u}{n} AR^{2/3} S_o^{1/2} \quad (17)$$

onde Q_{ro} = vazão de drenagem (ou vazão de "runoff")

Durante a fase de recessão, a condição de fronteira a montante é a seguinte:

$$x = x_R, Q = 0 \text{ para } y < 0,01 y_n \quad (18)$$

onde x_R = posição da água no sulco durante a fase de recessão.

A solução das equações

As equações que governam o fenômeno da irrigação por sulcos (equações (11) e (12) para o modelo hidrodinâmico, ou equações (11) e (14) para o modelo zero-inércia) são integradas numericamente no plano x-t, para todo tempo t após o início da irrigação e todas as estações x ao longo do sulco, isto é $0 < x < x_A$, onde x_A é a última estação para a qual a água avançou. A solução é obtida pela aplicação de um método implícito de diferenças fini-

tas, em uma seqüência de linhas de tempo separadas por intervalos de tempo dt, os quais podem ou não ser constantes. Em cada linha de tempo, a solução é encontrada numa seqüência de pontos x_k ($k = 1, 2 \dots N$; $N = i + 1$, onde $i = 1, 2, 3 \dots$, é o índice para tempo), definidos pela posição da frente de avanço em sucessivos instantes (Fig. 1). Vale salientar que diferentes tipos de células de computação no plano x-t são usados para permitir um menor incremento nas variáveis dependentes durante o processo de cálculo e, conseqüentemente, proporcionar maior precisão. Na Fig. 1, pode-se observar que, durante a fase de avanço, as células são oblíquas, mas durante a recessão todas as células são retangulares.

Assumindo que no tempo t_i todos os incrementos de distância foram determinados, exceto o incremento δx_{N-1} (δx_6 na Fig. 1. com $i = 6$), que todas as condições são conhecidas na linha de tempo t_{i-1} e que todas as lâminas infiltradas z são conhecidas no tempo t_i , as equações básicas (11 e 12 ou 11 e 14) contêm entre si quatro incógnitas Y_L^*, Q_L^*, Y_R^* e Q_R^* (veja Fig. 1, célula JMLR). Durante o mesmo intervalo de tempo δt , cada célula vizinha adiciona mais duas equações e duas incógnitas. A célula da ponta direita (na frente de avanço) adiciona seu comprimento (δx_6 , no caso) como mais uma incógnita. Se N representar o número total de pontos numa determinada linha de tempo t_i , então, um sistema de $(2N-2)$ equações não-lineares com 2N incógnitas é formado. As condições de fronteira, previamente descritas, são, então, utilizadas para fazer com que o número de equações seja igual ao número de incógnitas. Finalmente, o sistema de $(2N-2)$ equações não-lineares com $(2N-2)$ incógnitas é resolvido pelo uso de duas técnicas numéricas, conhecidas como o método de Newton-Raphson juntamente com o método da "double-sweep".

Como foi visto, um método implícito de diferenças finitas é utilizado para resolver as equações que governam o fluxo de água em sulcos com drenagem livre. O sistema de equações é resolvido simultaneamente pela técnica conhecida como "double-sweep". Um esquema iterativo (o método de Newton-Raphson) é usado devido à natureza não-linear das equações. Quando o sistema de equações converge após sucessivas iterações, a solução é avançada para um tempo, $t + \delta t$. O resultado principal deste procedimento é uma seqüência de perfis superficiais e infiltrados, calculados em função do tempo. Como subproduto deste procedimento, o comprimento do perfil superficial, ou seja, a distância que a água percorreu $x_A(t)$, é encontrado durante a fase de avanço; para tempos maiores que o tempo de aplicação da água (aqui chamado t_{co}), o tempo de recessão $t_R(x)$ é determinado, à medida que a água desaparece da superfície do solo.

O procedimento de cálculo brevemente descrito neste trabalho foi implementado em um programa de computador (B6700), escrito em FORTRAN IV. Uma listagem completa de programa, bem como maiores detalhes sobre o procedimento de cálculo são apresentados em Souza (1981).

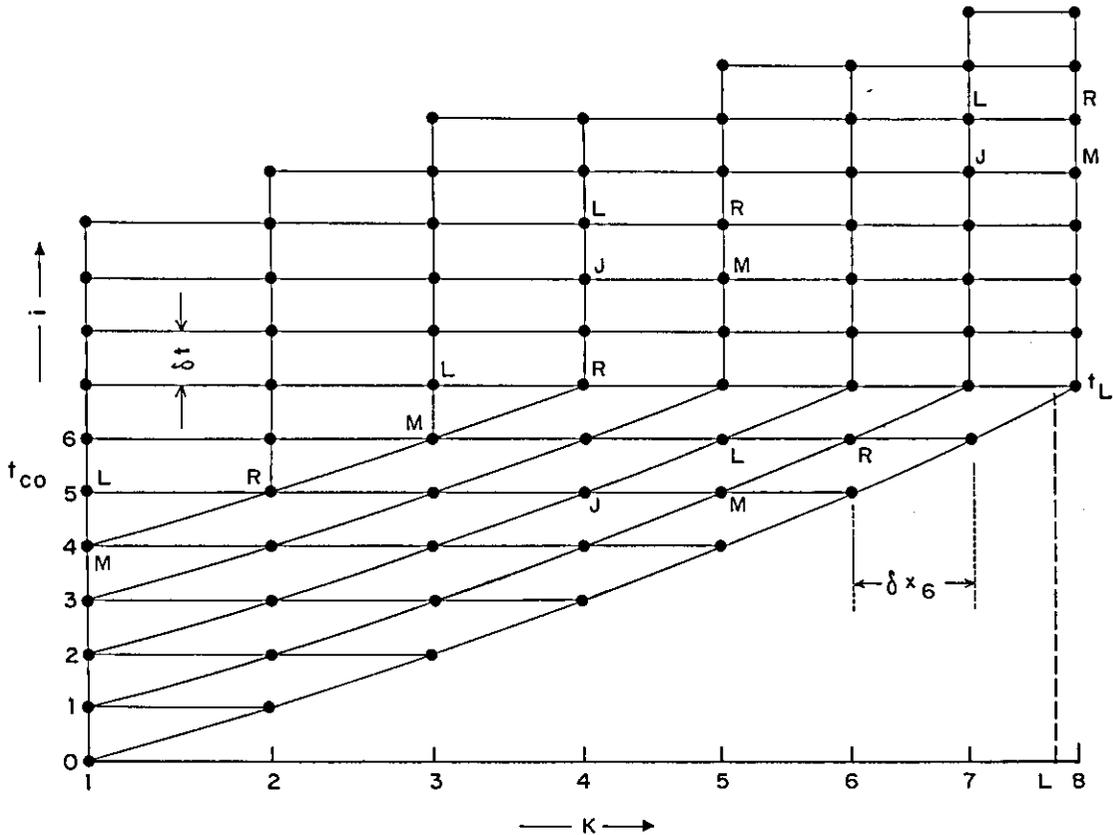


FIG. 1. Células de computação durante todas as fases da irrigação (Strelkoff s.n.t.).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O desempenho dos modelos é avaliado pela comprovação das soluções obtidas com dados de campo.

O primeiro exemplo utiliza dados obtidos em um campo de precisão (construído com a finalidade exclusiva de gerar dados precisos para testar modelos matemáticos) da Universidade do Arizona. O sulco é de forma parabólica, descrito pela equação $B = 2,095 Y^{0,4539}$, onde B é a largura da superfície livre da água e y é a lâmina d'água no sulco. Os dados usados neste exemplo são:

- $Q_{en} = 1,33 \text{ l/s (0.047 ft}^3\text{/s)}$
- $S_o = 0,001032$
- $L = 100 \text{ m (330 ft)}$

- $n = 0,022$
- $K = 7,49 \text{ cm/hr}^2 \text{ (2.91 in/hr}^2\text{)}$
- $a = 0,5$
- $t_{co} = 208 \text{ min}$
- $\delta t = 1 \text{ min}$

A Fig. 2 apresenta as curvas de avanço e recesão, calculadas pelos modelos hidrodinâmicos e zero-inércia, assim como todos os dados observados no campo. Observando-se esta figura, nota-se que os resultados dos modelos hidrodinâmicos e zero-inércia são quase idênticos, o que prova a validade da hipótese de zero-inércia na irrigação por sulcos. Além do mais, observa-se que os modelos simulam bem a curva de avanço da água; a diferença entre os valores computados e as observações de campo é de 4% no final do sulco. Am-

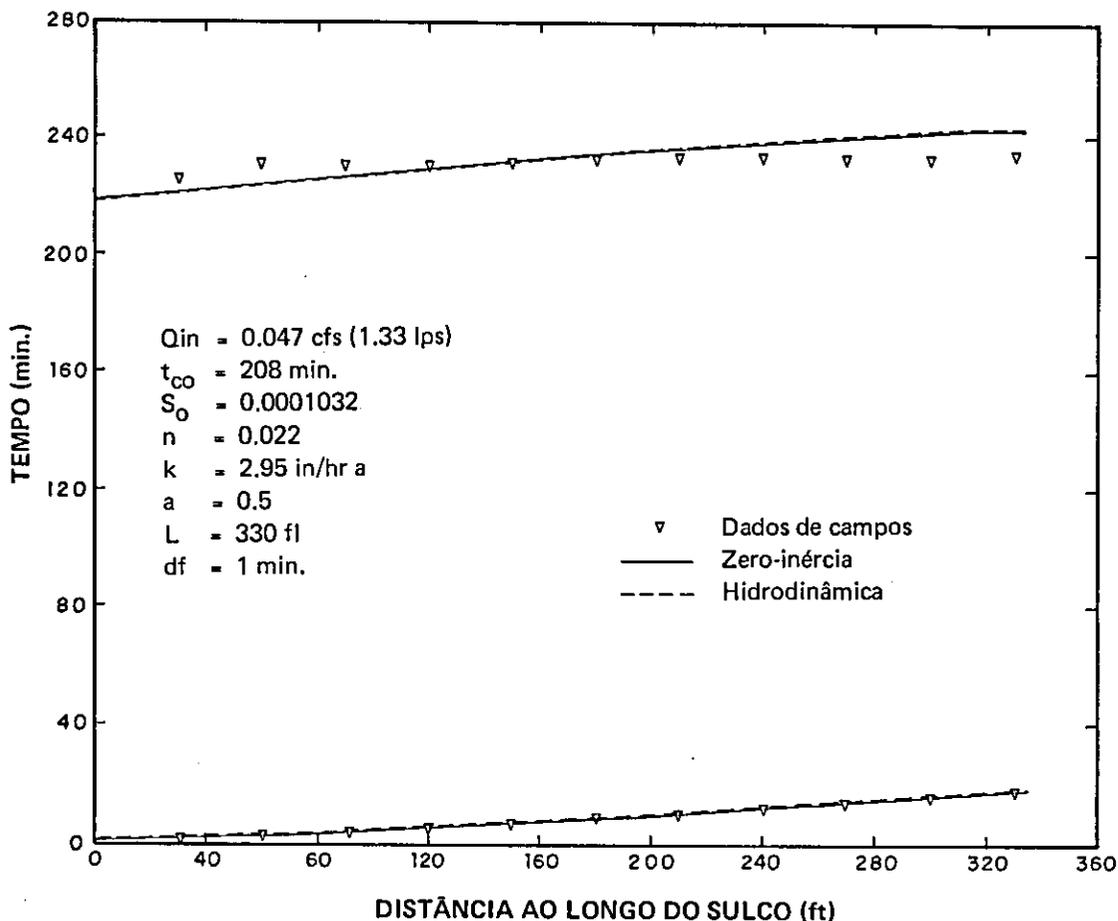


FIG. 2. Curvas de avanço e recessão computadas pelos modelos hidrodinâmico e zero-inércia comparados com dados de campo.

bos os modelos subestimam a recessão no início (cerca de 1%) e sobrestimam no final do fenômeno (aproximadamente 4%). O balanço de volume, no final da irrigação, apresentou o insignificante erro de 0,04% nos dois modelos.

O segundo exemplo demonstra a capacidade do modelo para utilizar informações de campo quando a técnica da redução da vazão é usada. Neste exemplo foram utilizados os seguintes dados:

$$\begin{aligned}
 Q_{en} &= 1,70 \text{ l/s} \\
 S_o &= 0,001068 \\
 L &= 100 \text{ m} \\
 n &= 0,022
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= 9,78 \text{ cm/hr}^2 \\
 a &= 0,6 \\
 t_{co} &= 352 \text{ min} \\
 \delta t &= 2 \text{ min} \\
 Q_2 &= 0,93 \text{ l/s (vazão reduzida)} \\
 t_2 &= 294 \text{ min (período com a vazão inicial)}
 \end{aligned}$$

Novamente, pode-se observar (Fig. 3) que os resultados dos modelos hidrodinâmico e zero-inércia não diferem substancialmente entre si. As curvas de avanço simuladas diferem, aproximadamente, 6% dos valores observados. A curva de recessão é subestimada por ambos os modelos. Uma comparação entre os volumes de escoamento superficial

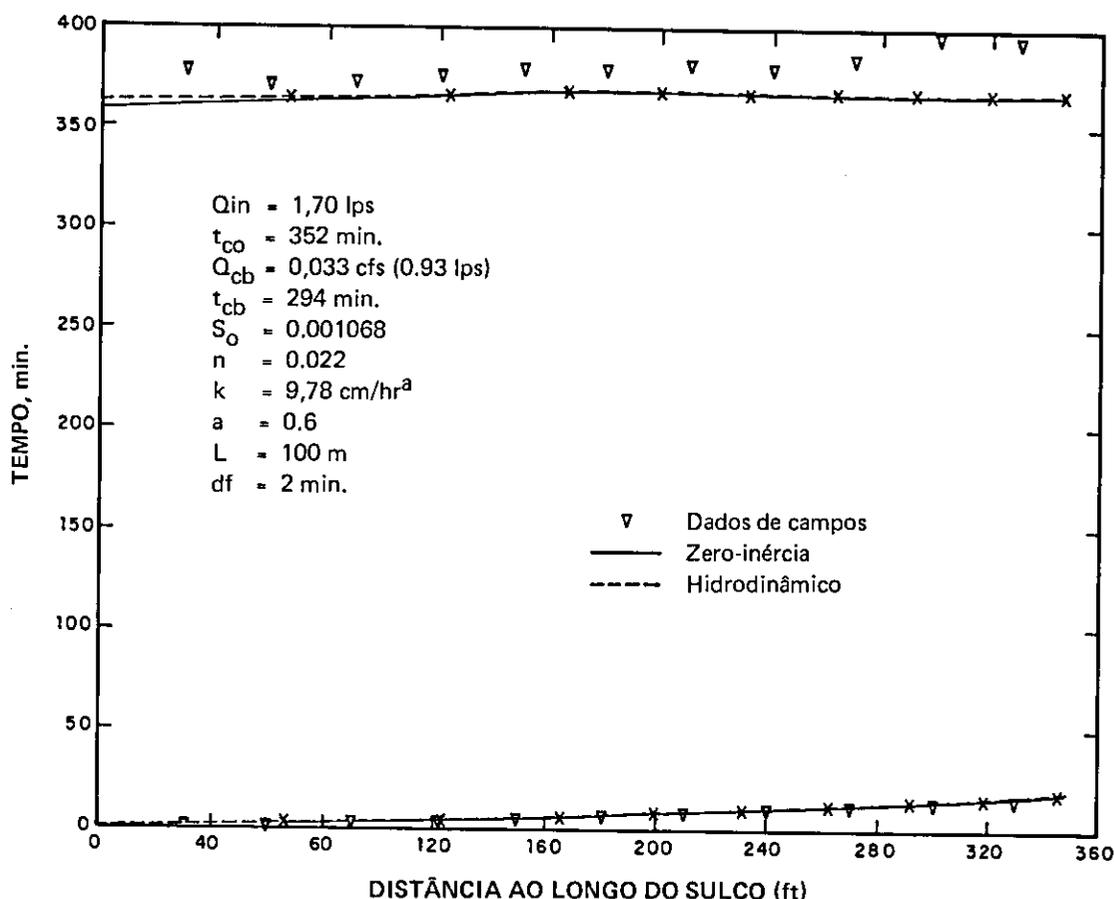


FIG. 3. Curvas de avanço e recessão computada pelos modelos hidrodinâmicos e zero-inércia comparados com dados de campo.

(V_{es}) e infiltrado (V_z) indicou que os modelos superestimam V_{es} em 5% e subestimam V_z em 15%. Contudo, o balanço de volume total ao final da irrigação apresentou uma percentagem de erro de apenas 0,2%.

Os dados do terceiro exemplo são os seguintes:

$Q_{en} = 0,81 \text{ l/s}$
 $S_o = 0,0036$
 $t_{co} = 202 \text{ min}$
 $L = 175 \text{ m}$
 $n = 0,020$
 $K = 7,3 \text{ cm/hr}^a$
 $a = 0,55$

Espaçamento entre sulcos = 1,2 m

$\delta t = 2 \text{ min}$

Mais uma vez fica demonstrado o bom desempenho dos modelos na predição do avanço e recessão (Fig. 4). O erro cometido na determinação do tempo de avanço ao final do sulco foi de somente 0,8%, enquanto que, em média, a recessão foi subestimada em 7%. Se fosse necessário aplicar uma lâmina d'água de 10 cm, o modelo teria computado uma eficiência de aplicação de 63%. Deve-se observar que, nos dois últimos exemplos, o valor do intervalo de tempo usado foi de 2 min, o que implica menor precisão nas soluções obtidas, com a vantagem de menores custos de processamento da informação.

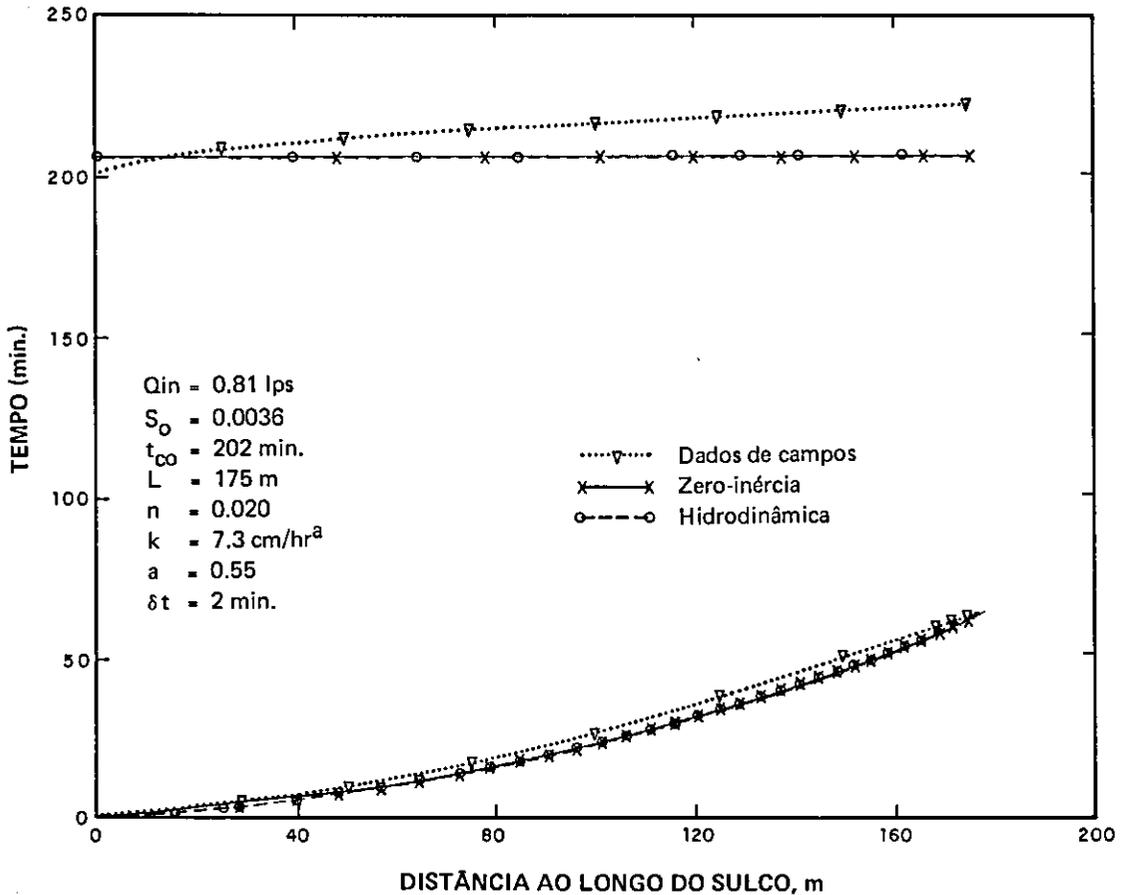


FIG. 4. Curvas de avanço e recessão computada pelos modelos hidrodinâmico e zero-inércia comparados com dados de campo.

CONCLUSÕES

Os resultados do presente estudo demonstraram a viabilidade da aplicação de modelos matemáticos para analisar e prever o desempenho do método de irrigação por sulcos. Contudo, os modelos apresentados aqui necessitam ser testados com mais dados, representando condições extremas de situações reais. Além do mais, o desenvolvimento de uma versão linearizada do modelo zero-inércia deve ser considerado, tendo em vista a redução do tempo de computação.

REFERÊNCIAS

- BASSETT, D.L. & FITZSIMMONS, D.W. Simulating overland flow in border irrigation. *Trans. ASAE*, 19(4):674-80, 1976.
- CHOW, V.T. *Open channel hydraulics*. New York, McGraw-Hill, 1959.
- DAKER, A. *A água na agricultura: irrigação e drenagem*. Rio de Janeiro, Freitas Bastos, 1973.
- DAVIS, J.R. *Estimating rate of advance for irrigation furrows*. Denver, Colorado, *Hydraulics of Surface Irrigation*, 1960. p.67-86.
- HENDERSON, F.M. *Open-channel flow*. New York, McMillan, 1966.
- OLÍTTA, A.F.L. *Os métodos de irrigação*. São Paulo, Nobel, 1977.
- SOUZA, F. de. *Nonlinear hydrodynamic model of furrow irrigation*. Davis, California, University of California, 1981. 172p. Tese Doutorado.
- Pesq. agropec. bras., Brasília, 19(9):1135-1143, set. 1984.

- STRELKOFF, T. Flow with equilibrium in border irrigation. s.n.t.
- STRELKOFF, T. Numerical solution of the saint-venant equations. ASCE, J. Hyd. Div., 96(HY1):223-52, 1970.
- STRELKOFF, T. & KATOPODES, N.D. End depth under zero-inertia conditions. ASCE, J. Hyd. Div., 103(HY1):699-711, 1977.
- WILKE, O.C. A hydrodynamic study of irrigation furrows. s.l., Texas A & M. University, Water Resources Institute, 1968.