FUNÇÕES DE PRODUÇÃO VON LIEBIG COM RENDIMENTOS DECRESCENTES[1]

CARLOS LEOMAR KREUZ[2], EDGAR AUGUSTO LANZER[3] e QUIRINO PARIS[4]

RESUMO - Apesar de os modelos de resposta da produção ao uso de materiais agrícolas não serem objeto de pesquisa recente, têm-se, ainda, questões esperando por resposta. A importância deste tópico se dá na medida em que funções de produção mais realistas, com significado biológico, possibilitam uma melhor interpretação de resultados experimentais. A lei do mínimo foi formulada por Justus von Liebig por volta de 1840. Esta lei explica a resposta da produção através do fator de produção que for mais escasso à planta. O problema associado com esta lei é que alguns pesquisadores evitam o seu uso porque as formulações algébricas até agora propostas para ela não possibilitam produções decrescentes. Os resultados obtidos indicam ser possível obter modelos von Liebig que consideram produções decrescentes. As conseqüências destes modelos estão associadas com platôs de produção mais elevados, quando comparados com as especificações von Liebig tradicionais. Os resultados obtidos também confirmam que especificações curvilíneas são mais indicadas para interpretar dados experimentais.

Termos para indexação: fatores de produção, análise de experimentos agrícolas, testes de hipóteses.

THE VON LIEBIG PRODUCTION FUNCTIONS WITH DECREASING YIELDS

ABSTRACT - Despite the fact that crop response to agricultural materials since a long time has been researched, there are several issues that are still waiting for answer. The importance of the issue is that a more realistic crop response model, with biological meaning, would allow a better interpretation of experimental results. The law of the minimum was stated by Justus von Liebig circa 1840. This law explains the crop response by the production factor that is most scarce to the plant. The problem associated to this law is that some researchers avoid to use it because the algebraic formulations commonly used to express the law do not allow a decreasing yields phase. Results gotten show that von Liebig models allow to have decreasing yields. Consequences of these new von Liebig models are associated with greater plateau production levels, suggesting greater use of input to get them. The von Liebig framework using the square-root polynomial regimes and the plateau, with or without specific BP (back-plan) regime is strongly suggested. Results gotten also corroborate the idea that curvilinear response functions, which characterize marginal decreasing yields, are more suitable specifications to interpret experimental data.

Index terms: crop production factors, analysis of experimental data, hypothesis tests.

INTRODUÇÃO

A lei do mínimo, desenvolvida por Justus von Liebig no final do século dezenove, é muito bem conhecida pelos agrônomos. De acordo com a teoria de Liebig, a resposta da produção agrícola está associada ao nutriente mais escasso. Em resumo, quando mais de um nutriente estiver presente no solo em quantidade inferior à ótima ("ótima" refere-se à quantidade necessária do insumo para atingir a pro-

[1] Aceito para publicação em 8 de novembro de 1994.
Este trabalho foi extraído da Tese de Doutorado do primeiro autor no curso de Engenharia de Produção na Universidade Federal de Santa Catarina.

[2] Eng. Agr., Dr., EPAGRI-SC/Centro de Tecnologia do Alto Vale do Rio do Peixe (CTAAVRP), Prof. UnC-Caçador/SC Caixa Postal 596, CEP 89500-000 Caçador, SC.

[3] Eng. Agr., Ph. D., Prof., UFSC/EPS-SC, Caixa Postal 476, CEP 88049, Florianópolis, SC.

[4] Eng. Agr., Ph. D., Prof., UCD/DAE-Davis, California, EUA.

dução máxima), a produção estará diretamente associada ao nutriente que for mais escasso às plantas. Este nutriente é chamado de elemento limitante e caracteriza a hipótese The von Liebig como a lei do mínimo (Browne, 1942, p.72).

Von Liebig não formulou sua lei matematicamente. Contudo, pesquisadores como Wallace (1990) e Tisdale et al. (1985, p.19) listam pelo menos trinta e cinco fatores de produção aos quais a produção é relacionada: fertilizantes, temperatura, água, radiação, população de plantas, plantas daninhas, insetos, doenças, qualidade da semente, variedade, estrutura do solo, pH, vento etc. Caso todos estes fatores sigam a lei de von Liebig, ela pode ser expressa como:

$$Y = \min\left[f(X_1), f(X_2), \ldots, f(X_{35})\right] \tag{1}$$

onde a produção Y está associada com o fator de produção mais escasso entre X_i, $i = 1, \ldots, 35$. De acordo com a lei de Liebig, há resposta ao fator mais limitante até outro nutriente começar a limitar a resposta da produção.

A formulação (1), contudo, é muito geral para uma análise empírica. Suponhamos que se esteja interessado em analisar somente dois nutrientes, X_1, X_2, mantendo os demais fatores de crescimento em níveis fixos. Neste caso, o modelo (2) é uma forma especializada da especificação (1):

$$Y = \min\left[f(X_1), f(X_2), m\right] \tag{2}$$

onde $m = \min\,[f(\overline{X}_3), \ldots, f(\overline{X}_{35})]$ e $\overline{X}_3, \ldots, \overline{X}_{35}$ são níveis pré-selecionados de $X_3, \ldots, X_{35}$.

Associado à lei do mínimo, está também o conceito do platô. Se houver apenas um insumo em quantidade inferior à ótima, a produção pode ser aumentada por incrementos na quantidade adicionada desse insumo até que se atinja a produção máxima, a qual se caracteriza por um platô. Para quantidades superiores a esse nível de insumo, mas não excessivamente maiores, a produção se mantém no nível máximo. Agronomicamente, o platô é visto como determinado por aqueles fatores de produção que estão presentes no nível ótimo, aos quais não há possibilidade de resposta através do aumento de sua disponibilidade. Matematicamente, o platô pode ser representado pelo parâmetro m da equação (2).

O trabalho de Mitscherlich (1909) e o advento dos modelos polinomiais de resposta de produção (Heady & Pesek, 1954) fizeram com que a lei do mínimo ficasse esquecida por quase um século. Os modelos polinomiais propostos eram, basicamente, a quadrática (3) e a raiz quadrada (4):

$$Y = a + b_1X_1 + c_1X_1^2 + b_2X_2 + c_2X_2^2 + fX_1X_2 + u \tag{3}$$

$$Y = a + b_1X_1 + c_1X_1^{0,5} + b_2X_2 + c_2X_2^{0,5} + {} + f(X_1X_2)^{0,5} + u \tag{4}$$

onde Y é a variável dependente; a, b_i (i=1,2), c_i, f são parâmetros; X_i é o nível do *i*-ésimo insumo; u é uma disturbância aleatória.

Contudo, no início dos anos setenta, com os modelos linear-platô (LRP), houve um retorno à lei do mínimo. Cate & Nelson (1971) sugeriram que modelos com duas retas que se interceptam interpretam muito bem dados experimentais. O modelo LRP, em que uma linha corresponde à fase com resposta (crescente) na função de produção e a segunda linha representa o nível de platô (correspondendo à ausência de resposta), é a mais intuitiva representação da lei do mínimo de Liebig (Dillon & Anderson, 1990, p.81). O modelo LRP pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} Y &= \min(Y_1, Y_2) + u \\ Y_1 &= a_1 + b_1X_1 \\ Y_2 &= m \end{aligned} \tag{5}$$

onde Y_1 é chamado função de resposta potencial da produção para o insumo X_1 ou primeiro regime; Y_2 o regime do platô; X_1 é o insumo da função de resposta potencial; a_1, b_1 são parâmetros do primeiro regime; *m* é o platô; *u* é o termo de disturbância aleatório.

Um campo de estudo relativamente recente, o dos testes de hipóteses para modelos não-aninhados, tem sido freqüentemente utilizado para demonstrar a superioridade dos modelos von Liebig em relação a formulações polinomiais (3 e 4) ou ao modelo de Mitscherlich-Baule:

$$Y = A(1 - b_1 e^{-c_1 X_1})(1 - b_1 e^{-c_2 X_2}) + u \qquad (6)$$

onde c_i (i=1,2) é a resposta ao *i*-ésimo nutriente X_i, e b_i (i=1,2) é uma estimativa do conteúdo no solo do *i*-ésimo X_i; *u* é o termo de disturbância aleatório.

O trabalho de Ackello-Ogutu et al. (1985) pioneirizou o procedimento de testar a lei do mínimo de von Liebig contra especificações polinomiais. Utilizando-se da estrutura do teste para modelos não-aninhados, Ackello-Ogutu demonstrou, com base em dados de um experimento de milho, que a lei do mínimo rejeita as especificações polinomiais. O trabalho de Ackello-Ogutu foi seguido pelo de Grimm et al. (1987), o qual demonstrou que a resposta da produção à água e ao N obedece à lei do mínimo, rejeitando especificações polinomiais.

Por fim, Paris (1992a, 1992b) demonstrou que a lei do mínimo de Liebig não necessariamente segue a especificação linear-platô. Trabalhando com dois regimes Mitscherlich, embutidos na estrutura de um modelo que segue a lei do mínimo, e perfazendo o teste P como descrito por Davidson & MacKinnon (1981), Paris foi capaz de demonstrar que um modelo von Liebig explica melhor dados experimentais do que o modelo Mitscherlich-Baule (6), recentemente sugerido por Frank et al. (1990) e os modelos polinômios (3 e 4).

O modelo von Liebig com regimes Mitscherlich é:

$$Y = \min(Y_1, Y_2) + u \qquad (7)$$

$$Y_1 = A(1 - b_1 e^{-c_1 X_1})$$

$$Y_2 = A(1 - b_2 e^{-c_2 X_2})$$

onde Y_1, Y_2 são as funções de resposta potencial aos insumos; X_1, X_2 são os níveis aplicados dos insumos; b_1, c_1 são os parâmetros associados com o insumo X_1; b_2, c_2 com o insumo X_2; *A* é o platô assintótico; e *u* é o termo de disturbância aleatório.

O modelo com rendimentos marginais decrescentes (7) eliminou a crítica existente contra a especificação LRP formulada por autores como Dahnke & Olson (1990, p.53), Miller (1991, p.24). Para eles, uma função de produção resultante de diferentes experimentos deve ser curvilínea. Também Cerrato & Blackmer (1990) contribuíram para a solução desta questão pela recomendação do modelo quadrático-platô.

Contudo, o modelo von Liebig não tem aceitação geral. Uma das críticas remanescentes contra o modelo diz respeito ao fato de ele não considerar produções decrescentes (Hexem & Heady, 1978; Miller, 1991, p.25). Diversos pesquisadores (entre eles Heady & Dillon, 1961, p.76) expressaram a opinião de que funções de produção devem considerar as produções decrescentes presentes em diversos conjuntos de dados experimentais. A importância desse segmento do modelo é a de que ele tem importantes implicações econômicas. French (1956, p.736) caracteriza essa importância da seguinte forma: em certas condições, com uma limitada quantidade de água no solo ou situações similares, os dados experimentais podem mostrar que a produção atinge um máximo, e, sob quantidades adicionais do nutriente, o resultado é um incremento negativo na produção. Este segmento de incremento negativo pode afetar de forma significativa a estimativa dos parâmetros no segmento com implicações econômicas.

No que diz respeito ao fato de o modelo LRP não considerar uma fase de produções decrescentes, cabe destacar a afirmação feita por Hexem & Heady (1978, p.45), quando justificam a escolha de modelos polinomiais para expressar a resposta da produção a água e N:

> Too, it is unlikely that a yield plateau best describes water and nitrogen response because sufficiently large quantities of either are known to depress yield and result in negative marginal productivity of the input. For these reasons generally, we do not attempt to estimate linear-segmented functions in this study.

Por outro lado, a ausência de uma fase de produções decrescentes no modelo LRP pode ter sido a razão do fraco desempenho do modelo quando os dados mostram uma marcante fase com rendimentos decrescentes (Chaudhary & Singh, 1986). Para resolver essa questão, Anderson & Nelson (1987, p.9) sugerem a eliminação das observações que caracterizam rendimentos decrescentes. Esta proposta, naturalmente, é insatisfatória, e métodos que utilizem toda a informação disponível precisam ser desenvolvidos.

O presente estudo tem por objetivo incorporar uma nova fase no modelo von Liebig, considerando produções decrescentes. Com essa nova fase, o modelo von Liebig poderá melhorar a interpretação de dados experimentais em que os rendimentos decrescentes estejam presentes, bem como sugerir recomendações econômicas mais realísticas. Um platô mais elevado é esperado para estes novos modelos quando comparado com os modelos von Liebig tradicionais. O objetivo, portanto, em outras palavras, é procurar dissimular a crítica dirigida ao modelo von Liebig do tipo LRP, que não possui uma fase de rendimentos decrescentes. Além disso, o modelo utilizará toda a informação disponível, sem a arbitrária classificação e eliminação de "pontos fora".

MATERIAL E MÉTODOS

Para atender ao objetivo proposto, técnicas específicas necessitam ser desenvolvidas. A primeira diz respeito à estimação de modelos von Liebig; a segunda diz respeito a testes de hipótese para modelos aninhados e para os não-aninhados. A terceira refere-se à adaptação dos modelos von Liebig para considerar produções decrescentes.

Estimação de um modelo LRP ou von Liebig

O modelo LRP para dois insumos pode assumir a forma:

$$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u \qquad (8)$$

$$Y_1 = a_1 + b_1 X_1$$

$$Y_2 = a_2 + b_2 X_2$$

$$Y_3 = m$$

onde Y é a produção da cultura; Y_1 é a produção associada ao primeiro regime; Y_2 ao segundo regime; Y_3 ao regime do platô; a_i (i=1,2) são interceptos dos regimes lineares; b_i são as taxas de regimes lineares; X_i são insumos; *u* corresponde ao erro aleatório comum.

A estimação do modelo (8), bem como (7), segue os procedimentos tradicionais de maximização da função de máxima verossimilhança, os quais podem ser desenvolvidos utilizando-se do pacote de programação matemática GAMS, de Brooke et al. (1992). De acordo com Lanzer et al. (1987), o logaritmo da função de máxima verossimilhança pode ser escrito como:

$$\max\ L = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[Y_i - \min(Y_{1i}, Y_{2i}, Y_{3i})]^2 \qquad (9)$$

onde *L* é o logaritmo da função de máxima verossimilhança a ser maximizada; *n* é o número de observações; σ é o desvio padrão do modelo; Y_i (i=1... n) são as produções observadas; e Y_{ji} (j=1,2) são os regimes dos insumos, ou o regime do platô (j=3).

Uma vez que o modelo von Liebig em (9) inclui um operador *min*, o problema de máxima verossimilhança é melhor descrito como

$$\max\ L = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 \qquad (10)$$

sujeito a

$$Y_i = a_1 + b_1X_1 - S_{1i} + u_i$$
$$Y_i = a_2 + b_2X_2 - S_{2i} + u_i$$
$$Y_i = m - S_{3i} + u_i$$
$$0 = S_{1i}S_{2i}S_{3i}$$

onde u_i (i=1,2... n) são termos de erro aleatório; S_{1i}, S_{2i}, S_{3i} são variáveis de folga (positivas) para o primeiro, segundo e terceiro regimes, respectivamente; demais símbolos mantêm seus significados prévios.

As restrições $S_{1i}\ S_{2i}\ S_{3i} = 0$, juntamente com a não-negatividade das variáveis de folga, asseguram que Y_i será igual ao menor entre Y_{1i}, Y_{2i} ou Y_{3i}. Mais intuitivamente, as variáveis de folga podem ser vistas como variáveis indicadoras com localização desconhecida.

Em um problema de programação matemática, é mais conveniente usar as não-linearidades na função-objetivo. Com o uso de um termo de penalização *P*, a função objetivo do modelo (10) pode ser reescrita como:

$$\max\ L = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - P\sum_{i=1}^{n}S_{1i}S_{2i}S_{3i} \qquad (11)$$

Paris & Knapp (1989) demonstraram que tanto estimativas de máxima verossimilhança como bootstrapping são técnicas adequadas para a obtenção dos desvios padrões dos parâmetros. Bootstrapping é uma técnica de Monte Carlo em que a distribuição empírica dos resíduos é assumida para representar a distribuição populacional do erro (Freedman & Peters, 1984). Usando uma distribuição uniforme para gerar a ordem de sorteio dos resíduos, a repetição do sorteio com reposição possibilita que se tenha quantas amostras aleatórias de pseudo-observações quanto desejado. Para cada amostra dos pseudo-dados, os parâmetros são computados. Com um número razoável de amostras, Paris & Knapp (1989) trabalharam com 50 amostras, os desvios padrões dos parâmetros estimados aproximam os desvios padrões verdadeiros. Nesse trabalho, ambas as técnicas são utilizadas. A decisão pelo uso de um ou de outro procedimento foi feita com o propósito de minimizar o tempo necessário de trabalho. Em Kreuz (1994), no apêndice A, é apresentada a listagem de um arquivo GAMS, em que o processo de programar as estimativas de máxima verossimilhança e a técnica de bootstrapping são ilustrados. Note que especificações outras que não a LRP podem ser programadas no GAMS pela alteração das restrições em 11, e, caso necessário, no número de variáveis de folga.

Teste de hipótese para modelos não-aninhados e aninhados

O desenvolvimento de um procedimento estatístico para a seleção de um modelo perante várias alternativas rivais é campo de estudo recente. De acordo com Paris (1992b), essas técnicas são chamadas de teste de hipótese para modelos não-aninhados, porque os parâmetros de um modelo não são aninhados no espaço dos parâmetros do modelo alternativo, e vice-versa. Portanto, o bem conhecido teste *F* e o teste da razão de máxima verossimilhança não podem ser aplicados para a verificação da hipótese nula no que diz respeito a parâmetros de modelos não-aninhados. Suponha que seja dada uma hipótese nula e uma associada hipótese alternativa, como segue

$$H_0 \;:\; y_i = f(x_i,\beta) + u_{0i} \tag{12}$$

$$H_1 \;:\; y_i = g(z_i,\gamma) + u_{1i} \tag{13}$$

onde $f(x_i, \beta) + u_{0i}$ e $g(z_i, \gamma) + u_{1i}$ são modelos estatísticos, possivelmente não-lineares, que não compartilham qualquer parâmetro. Por exemplo, $f(x_i, \beta)$ poderia ser o modelo Mitscherlich-Baule expresso em (6), enquanto $g(z_i, \gamma)$ poderia ser o modelo polinomial raiz quadrada (4). Davidson & MacKinnon (1981) demonstraram que a seguinte relação, chamada de teste P, representa o procedimento adequado para a seleção do modelo apropriado:

$$y_i - \hat{f}_i = \alpha(\hat{g}_i - \hat{f}_i) + \hat{F}_i b + e_i \tag{14}$$

onde $\hat{f}_i$ e $\hat{g}_i$ são os valores estimados dos modelos sob a hipótese nula e a alternativa, respectivamente. $\hat{F}_i$ é o i--ésimo vetor linha da primeira derivada de $f(x_i, \beta)$ com relação aos parâmetros β, avaliados em suas estimativas $\hat{\beta}$, e $b = (\beta - \hat{\beta})$. A idéia por trás da equação (14) é que, se o parâmetro α for significativamente diferente de zero, então a informação contida no modelo alternativo $\hat{g}_i$ contribui de modo substantivo para explicar os resíduos do modelo nulo $(Y_i - \hat{f}_i)$. Nesse caso, a especificação do modelo nulo é insuficiente. Ao contrário, se o parâmetro α for igual a zero, a informação a respeito de $\hat{g}_i$ é irrelevante para $(y_i - \hat{f}_i)$. Portanto, a variável aleatória $P = \hat{\alpha}/SD(\hat{\alpha})$, onde $SD(\hat{\alpha})$ é o desvio padrão de $\hat{\alpha}$, representa a estatística desta especificação não-aninhada. Davidson & MacKinnon (1981) demonstraram que $\hat{\alpha}/SD(\hat{\alpha})$ é distribuído assintoticamente como uma variável normal padronizada. Para completar a verificação da hipótese, é necessário reverter as funções dos modelos e estimar a equação (14) uma segunda vez, com $g(z_i, \gamma)$ como a nova hipótese nula. Tem-se, portanto, quatro eventos possíveis. Suponha que $P_0 = \hat{\alpha}_0/SD(\hat{\alpha}_0)$ quando $f(x_i,\beta)$ é o modelo associado à hipótese nula, e $P_1 = \hat{\alpha} / SD(\hat{\alpha}_1)$ quando $g(z_i,\gamma)$ for o modelo nulo. Para um dado nível de significância, por exemplo 0,05, o teste P acima conduz a quatro possíveis resultados:

(a) "Aceitar" H_0 e rejeitar H_1 quando $|P_0| < 1{,}960$ e $|P_1| > 1{,}960$

(b) Rejeitar H_0 e "aceitar" H_1 quando $|P_0| > 1{,}960$ e $|P_1| < 1{,}960$

(c) Rejeitar ambos H_0 e H_1 quando $|P_0| > 1{,}960$ e $|P_1| > 1{,}960$

(d) "Aceitar" ambos H_0 e H_1 quando $|P_0| < 1{,}960$ e $|P_1| < 1{,}960$.

Para modelos aninhados, o teste de hipótese pode ser executado utilizando-se o teste da razão de máxima verossimilhança. De acordo com Greene (1993), se $\hat{L}_u$ e $\hat{L}_r$ são funções de máxima verossimilhança não-restritas e restritas, respectivamente, a razão de máxima verossimilhança é definida como

$$\lambda = \frac{\hat{L}_r}{\hat{L}_u} \tag{15}$$

onde ambos os valores da função de máxima verossimilhança são positivos. Em certas condições de regularidade, a estatística $-2\ln\lambda$ é distribuída assintoticamente como

Qui-quadrado, com o número de graus de liberdade equivalente ao número de restrições impostas. Por exemplo, para testar a restrição de dois parâmetros no modelo, como o valor tabulado da estatística Qui-quadrado para dois graus de liberdade a um nível de significância de 0,05 é 5,99, as restrições não são rejeitadas quando

$$-2(\log L_r - \log L_u) < 5{,}99 \qquad (16)$$

onde $\log L_r$ e $\log L_u$ são os valores do logaritmo da função de máxima verossimilhança para o modelo restrito e não- restrito, respectivamente.

Modelos von Liebig com produções decrescentes

Os rendimentos ou produções decrescentes podem ser incorporados em modelos com um ou dois insumos. Kreuz (1994) apresenta uma discussão ilustrada sobre modelos com um insumo. Contudo, um modelo von Liebig é melhor caracterizado com dois insumos, quando a não-substituição entre insumos, um dos pilares do modelo (o outro é o platô), pode ser caracterizado (Lanzer et al., 1981).

O modelo von Liebig linear com dois insumos e rendimentos decrescentes pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} Y &= \min(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)+u \qquad (17)\\ Y_1 &= a_1 + b_1X_1\\ Y_2 &= a_2 + b_2X_2\\ Y_3 &= m\\ Y_4 &= g_1 + d_1X_1 + d_2X_2\\ g_1 &\geq m\\ d_1,d_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

onde Y_4 é o regime de produções decrescentes (BP); g_1 é o intercepto do regime de BP; d_1, d_2 taxas negativas de incremento nos regimes BP; demais símbolos mantêm seus significados prévios.

Note que o modelo (17) introduz a possibilidade de substituição na fase de rendimentos decrescentes (Y_4). Contudo, tal fato não compromete a lei de Liebig, uma vez que o objetivo do regime de BP é melhorar a estimativa dos parâmetros nos demais regimes. Modelos em que a substituição na fase de BP é evitada foram propostos (Kreuz, 1994). Contudo eles não se mostraram promissores para a análise de dados experimentais.

Também uma especificação que use o modelo raiz quadrada (ou outro modelo polinomial côncavo) pode ser proposta para considerar rendimentos decrescentes, com (SRvLBP) ou sem (SRvL) um regime específico para captar os efeitos decrescentes:

$$\begin{aligned} Y &= \min(Y_1,Y_2,Y_3) + u \qquad (18)\\ Y_1 &= a_1 + b_1X_1 + c_1X_1^{0,5}\\ Y_2 &= a_2 + b_3X_2 + c_2X_2^{0,5}\\ Y_3 &= m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \min(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) + u \qquad (19)\\ Y_1 &= a_1 + b_1X_1 + c_1X_1^{0,5}\\ Y_2 &= a_2 + b_2X_2 + c_2X_2^{0,5}\\ Y_3 &= m\\ Y_4 &= g_1 + d_1X_1 + d_2X_2\\ g_1 &\geq m\\ d_1,d_2 &\leq 0, \end{aligned}$$

onde todos os símbolos mantêm seus significados prévios.

A diferença entre os modelos (18) e (19) se dá pela presença de um regime específico para BP no modelo (19), o que adiciona maior flexibilidade à especificação raiz quadrada na fase de rendimentos crescentes. Naturalmente, a especificação (19) reduz-se ao modelo (18) quando os dados sendo analisados não mostram rendimentos decrescentes, ou apenas poucas observações caracterizam esta fase.

A viabilidade de estimação dos modelos apresentados foi comprovada com dados não-reais. Em Kreuz (1994), um conjunto de dados do tipo LRPBP foi criado para comprovar a viabilidade. No presente trabalho, quer-se reanalisar dados experimentais analisados por outros pesquisadores e comprovar a superioridade, através do uso de teste de hipóteses, dos modelos von Liebig com BP ("back-plan"). Os dois conjuntos de dados escolhidos foram: a) Resposta do algodão a água irrigada e nitrogênio em West Side/Ca/EUA em 1969 (Hexem e Heady, 1978); b) Resposta do milho a fósforo e nitrogênio em Iowa/EUA, 1952 (Heady et al., 1955).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nos dois conjuntos de dados analisados, os resultados confirmam uma melhor interpretação de dados experimentais quando se usam modelos von Liebig que possibilitam rendimentos decrescentes.

Experimento de algodão (1969)

Paris (1992a) demonstrou que um modelo von Liebig com regimes lineares, ou seja, LRP (8), possibilita uma melhor interpretação para estes dados do que modelos polinomiais (4) ou Mitscherlich-Baule (6).

Para esses dados, o uso do modelo SRvL (18) ou a introdução de um BP ao modelo LRP (LRPBP) e ao modelo raiz quadrada (SRvLBP) possibilita uma melhor interpretação (Tabela 1). Os modelos LRPBP e SRvLBP podem ser considerados aninhados e comparados utilizando-se o teste da razão de máxima verossimilhança. Por este teste, o modelo SRvLBP mostra-se superior, uma vez que -2(43,915 - 47,784) > 5,99. Usando o modelo SRvLBP em um teste de hipótese para especificações não-aninhadas contra a formulação LRP (Tabela 2), é possível confirmar que um primeiro estágio curvilíneo, associado com a possibilidade de produções decrescentes, interpreta este conjunto de dados de uma forma mais adequada. É importante notar que este resultado é obtido

TABELA 1. Resultados obtidos para o experimento de algodão em West Side, California, 1969*.

von Liebig Linear (LRP) **:

$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u$

$Y_1 = -0{,}151 + 5{,}653W$	(0,071); (0,474);				
$Y_2 = 0{,}763 + 3{,}680N$	(0,021); (0,639);				
$Y_3 = 1{,}146$	(0,020);				
logL = 39,239;	SSR = 0,075;	R^2 = 0,962;	df = 21;	$\hat{\sigma}$ = 0,053;	

von Liebig Linear com Back-Plan (LRPBP):

$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) + u$

$Y_1 = -0{,}151 + 5{,}653W$	(0,064); (0,423);			
$Y_2 = 0{,}763 + 3{,}680N$	(0,028); (0,592);			
$Y_3 = 1{,}190$	(0,075);			
$Y_4 = 1{,}486 - 0{,}367W - 0{,}762N$	(0,183); (0,295); (0,407);			
logL = 43,915;	SSR = 0,052;	R^2 = 0,973;	df = 18;	$\hat{\sigma}$ = 0,045;

von Liebig Raiz Quadrada (SRvL):

$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u$

$Y_1 = -2{,}469 - 10{,}105W + 12{,}215W^{.5}$	(0,412); (2,172); (1,919);			
$Y_2 = 0{,}753 - 2{,}260N + 1{,}936N^{.5}$	(0,026); (0,468); (0,285);			
$Y_3 = 1{,}168$	(0,137);			
logL = 41,353;	SSR = 0,063;	R^2 = 0,968;	df = 19;	$\hat{\sigma}$ = 0,049;

von Liebig Raiz Quadrada com Back-Plan (SRvLBP):

$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) + u$

$Y_1 = -2{,}477 - 10{,}053W + 12{,}221W^{.5}$	(0,363); (1,833); (1,665);			
$Y_2 = 0{,}757 - 1{,}080N + 1{,}480N^{.5}$	(0,025); (1,166); (0,490);			
$Y_3 = 1{,}187$	(0,022);			
$Y_4 = 1{,}623 - 0{,}678W - 0{,}708N$	(0,208); (0,328); (0,412);			
logL = 47,784;	SSR = 0,034;	R^2 = 0,982;	df = 16;	$\hat{\sigma}$ = 0,036;

* Estatísticas entre parênteses são os desvios padrões obtidos por bootstrapping, exceto para SRvL.

** Paris (1992a).

TABELA 2. Resultados do teste P para modelos não-aninhados para o experimento de algodão em West Side, California, 1969.

Hipótese alternativa	Hipótese nula* von Liebig linear	von Liebig raiz quadrada BP
von Liebig linear (LRP)	...	-0,793
von Liebig raiz quadr. BP (SRvLBP)	5,361**	...

* Sob a hipótese nula, a estatística P é distribuída como uma variável normal padronizada.
** Indica significância a $P < 0{,}01$.

apesar de os valores do R^2 estarem próximos. Uma maior distinção entre os modelos através do uso das estatísticas tradicionais é possível com o uso do logaritmo da função de máxima verossimilhança (log L).

Nota-se, também, que as duas formulações que incluem específicos BP possibilitam maiores platôs quando comparadas com as demais formulações presentes na Tabela 1. A importância desse ponto, como anteriormente comentado, é a de que um maior uso de insumos é necessário para atingir o rendimento máximo. Comparando-se os modelos LRP e SRvL, o último acusa um nível de platô mais elevado. Este resultado está em concordância com resultados obtidos por Jauregui & Paris (1984). Eles obtiveram a mesma tendência, em experimento de um insumo, comparando os resultados do modelo quadrático-platô com os do LRP. No presente estudo, porém, pode ser constatado que o modelo raiz quadrada, quando utilizado em uma estrutura que considera a lei do mínimo de von Liebig, produz resultados superiores aos do uso do modelo quadrático nesta mesma estrutura.

A análise econômica foi conduzida maximizando a função do lucro (parcial). Utilizando o modelo LRP como exemplo, obtém-se:

$$\max \pi = P_y Y - P_n N - P_w W \qquad (20)$$

sujeito a

$$Y \leq -0{,}151 + 5{,}653W$$
$$Y \leq 0{,}763 + 3{,}680N$$
$$Y \leq 1{,}146$$

onde π representa o lucro, e P_y, P_w, P_n representam os preços da polpa de algodão (Y), da água (W) e do nitrogênio (N), respectivamente. A Tabela 3 mostra que o modelo SRvLBP sugere o mais elevado nível

TABELA 3. Análise econômica para os dados experimentais de algodão em West Side, California, 1969.

Função	Preços normais N* 0,15	W* 1,98	Y* 0,60	lucro	Alto preço de venda N* 0,15	W* 1,98	Y* 1,20	lucro	Altos custos N* 0,30	W* 3,96	Y* 0,60	lucro
Raiz Quadr. polin.	165	33,9	1162	606	199	35,7	1173	1307	118	30,8	1130	521
von Liebig Linear	104	22,9	1146	627	104	22,9	1146	1314	104	22,9	1146	566
von Liebig Linear BP	116	23,7	1190	650	116	23,7	1190	1364	116	23,7	1190	585
von Liebig Raiz Quadr.	141	27,7	1161	621	162	28,1	1166	1319	100	26,4	1140	549
von L. Raiz Quadr. BP	175	28,9	1187	629	175	28,9	1187	1341	148	27,4	1166	547

* Indica nível ótimo (N, libras/acre; W, polegadas/acre; Y, libras/acre).

ótimo de nitrogênio e um uso de água intermediário aos níveis indicados pelos modelos raiz quadrada polinomial e o LRP. Contudo, o lucro que será obtido seguindo a recomendação do modelo SRvLBP é levemente maior do que o do LRP. Um lucro maior seria obtido pelo modelo LRPBP. Contudo, um comportamento curvilíneo para a fase de resposta crescente é mais indicado para representar este conjunto de dados, como pôde ser comprovado na discussão prévia. A recomendação ótima obtida com o modelo SRvLBP não foi sensível a um aumento no preço de venda, mas o foi a um aumento nos preços dos insumos.

Milho em Iowa (1952)

Foi demonstrado por Paris (1992a, 1992b) que um modelo von Liebig com regimes Mitscherlich dá uma melhor interpretação a estes dados em comparação com o resultado obtido com o modelo polinomial (4) ou a formulação Mitscherlich-Baule (6). Contudo, a Tabela 4 mostra que estes dados são melhor interpretados pela formulação von Liebig com regimes em raiz quadrada (SRvL). O modelo SRvL possibilita um valor do logaritmo da função de máxima verossimilhança (log L) 7,4 pontos acima do valor obtido com o modelo von Liebig com regimes Mitscherlich proposto por Paris para esse conjunto de dados.

A melhor interpretação obtida com o modelo SRvL é comprovada através de teste de hipótese para modelos não-aninhados, utilizando-se o teste P (Tabela 5). A especificação SRvL rejeita e não é rejeitada pelo modelo von Liebig com regimes Mitscherlich. Este resultado confirma a hipótese de que um modelo von Liebig que possibilita rendi-

TABELA 4. Resultados de estimação de modelos para o experimento de milho em Iowa (1952)*.

Raiz quadrada polinomial**:

$Y = -0,057 - 0,316N - 0,417P + 0,635N^{.5} + 0,852P^{.5} + 0,341(PN)^{.5} + u$

(0,066); (0,040); (0,040); (0,087); (0,087); (0,039);

logL = 69,058; df = 108; $\hat{\sigma}$ = 0,136;

von Liebig linear (LRP)**:

$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u$

$Y_1 = 0,200 + 1,222P$ (0,041); (0,076);

$Y_2 = 0,290 + 0,960N$ (0,042); (0,097);

$Y_3 = 1,246$ (0,023);

logL = 65,221; df = 109; $\hat{\sigma}$ = 0,137;

von Liebig Mitscherlich**:

$Y = \min(Y_1, Y_2) + u$

$Y_1 = 1,291(1 - 0,870e^{-2,286P})$ (0,028); (0,033); (0,313);

$Y_2 = 1,291(1 - 0,791e^{-1,734N})$ (0,028); (0,029); (0,227);

logL = 76,060; SSR = 1,752; R^2 = 0,928; df = 109; $\hat{\sigma}$ = 0,124;

von Liebig raiz quadrada (SRvL):

$Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3) + u$

$Y_1 = 0,161 - 0,432P + 1,396P^{.5}$ (0,037); (0,059); (0,093);

$Y_2 = 0,280 + 0,618N + 0,296N^{.5}$ (0,035); (0,266); (0,215);

$Y_3 = 1,276$ (0,040);

logL = 83,462; SSR = 1,543; R^2 = 0,936; $\hat{\sigma}$ = 0,116 df = 107;

* Os valores entre parênteses são os desvios padrões.

** Paris (1992a).

TABELA 5. Resultados do teste P para modelos não-aninhados para o experimento de milho em Iowa, 1952.

	Hipótese nula*	
Hipótese alternativa	von Liebig Mitschelich	von Liebig raiz quadrada
von Liebig Mitschelich	...	-0,466
von Liebig raiz quadr. (SRvL)	3,747**	...

* Sob a hipótese nula, a estatística P é distribuída como uma variável normal padronizada.
** Indica significância a P < 0,01.

mentos decrescentes está em melhor sintonia com o comportamento da natureza.

Outros modelos von Liebig, como especificações com regimes BP próprios, também foram estimados. Contudo, não foi possível, para os dados em análise, a introdução de um regime específico para as produções decrescentes. Também um modelo que use um expoente de segunda ordem (quadrático) ao invés da raiz quadrada foi estimado. Contudo os valores de log L foram sensivelmente menores.

Análise econômica foi conduzida maximizando a função de lucro (veja 20), sendo os resultados apresentados na Tabela 6. O modelo polinomial raiz quadrada, sugerido por Heady et al. (1955) para estes dados, é um dos menos rentáveis, uma vez que as recomendações de N e P são altas. Por outro lado, o modelo LRP é o que proporcionaria o maior lucro, sendo o que sugere o menor uso de insumos. O modelo von Liebig com regimes Mitscherlich é o menos rentável para uma condição de preços normais. Este resultado deve estar associado ao fato de o modelo apenas possuir um platô assintótico, não captando os efeitos de rendimentos decrescentes que os dados mostram. O modelo SRvL, que se mostrou o mais indicado para estes dados, encontra-se em uma posição intermediária, em termos de rentabilidade e recomendação de uso de insumos. O uso de uma análise de sensibilidade (custos altos ou alto preço de venda) não altera de forma significativa esta conclusão.

TABELA 6. Análise econômica para os dados experimentais de milho em Iowa (1952).

Função	Preços normais				Altos custos				Preço de venda alto			
	N* 0,15	P* 0,22	Y* 0,25	lucro	N* 0,30	P* 0,44	Y* 0,25	lucro	N* 0,15	P* 0,22	Y* 0,50	lucro
Raiz quadr. polin.	210	178	125	243	129	109	110	187	282	239	133	567
von Liebig linear	100	86	125	278	100	86	125	244	100	86	125	589
Lieberg Mitscherlich	152	120	122	225	112	89	114	213	192	150	125	565
von Liebig raiz quadr.	108	175	125	258	97	119	117	211	111	213	128	576

* Indica nível ótimo: N e P em libras/acre; Y em bushels/acre.

CONCLUSÕES

Os modelos von Liebig possibilitam que se estimem rendimentos decrescentes. Especificações com regime específico para captar estes efeitos ou modelos que utilizam uma função polinomial côncava melhoram a interpretação de resultados experimentais. A conseqüência destes modelos está associada a um maior nível de produção de platô, o que acarreta um maior uso de insumos do que os modelos tradicionais (LRP). O modelo von Liebig que utiliza regimes com a polinomial raiz quadrada e um regime de platô, com ou sem específico regime de produções decrescentes (BP), é fortemente sugerido. Isso porque esse foi o modelo de melhor desempenho nos experimentos analisados, superando o modelo von Liebig com regimes Mitscherlich sugerido por Paris (1992a, 1992b). Os resultados também confirmam a idéia de que a resposta da produção agrícola segue um comportamento curvilíneo, o que caracteriza rendimentos físicos marginais decrescentes.

REFERÊNCIAS

ACKELLO-OGUTU, C.; PARIS, Q.; WILLIAMS, W.A. Testing a von Liebig crop response function against polynomial specifications. **American Journal Agricultural Economics**, v.67, p.873-880, 1985.

ANDERSON, R.L.; NELSON, L.A. **Linear-plateau and plateau-linear-plateau models useful in evaluating nutrient responses**. [S.l.]: North Carolina State University Research Service, 1987 (Technical Bulletin, 283).

BROOKE, A.; KENDRICK, D.; MEERAUS, A. **GAMS, a user's guide**. Redwood City, California: The Scientific Press, 1992.

BROWNE, C.A. **Liebig and the Law of the Minimum**. In: MOULTON, F.R. **Liebig and After Liebig**. [S.l.]: American Association for the Advancement of Science, 1942.

CATE, R.B.; NELSON, L.A. A simple statistical procedure for partitioning soil test correlation data into two classes. **Soil Science Society American Journal**, v.35, p.658-660, 1971.

CERRATO, M.E.; BLACKMER, A. M. Comparison of models for describing corn yield response to nitrogen fertilizer. **Agronomy Journal**, v.82, p.138-143, 1990.

CHAUDHARY, F.S.; SINGH, R. Evaluation of fertilizer response by inverse Quadratic model. **Indian Journal Agricultural Science**, v.56, p.873-877, 1986.

DAHNKE, W.C.; OLSON, R. A. III. Soil test recommendations. In: WESTERMAN, R.L. **Soil Testing and Plant Analysis**. [S.l.]: Soil Science Society of America, Inc., 1990.

DAVIDSON, R.; MACKINNON, J. G. Several tests for model specification in the presence of alternative hypotheses. **Econometrica**, v.49, p.781--793, 1981.

DILLON, J.L.; ANDERSON, J.R. **The analysis of response in crop and livestock production**. [S.l.]: Pegamon Press, 1990. 251p.

FRANK, M.D.; BEATTIE, B.R.; EMBLETON, M.E. A comparison of alternative crop response models. **American Journal Agricultural Economics**, v.72, p.597-603, 1990.

FREEDMAN, D.; PETERS, S.C. Bootstrapping a regression equation: some empirical results. **Journal of American Statistician Association**, v.79, p.97-106, 1984.

FRENCH, B.L. Functional relationships for irrigated corn response to nitrogen. **Journal Farm Economics**, v.38, p.736-747, 1956.

GREENE, W.H. **Econometric analysis**. 2. ed. [S.l.]: New York University, 1993. 791p.

GRIMM, S. S.; PARIS, Q.; WILLIAMS, W. A. A von Liebig model for water and nitrogen crop response. **Western Journal Agricultural Economics**, v.12, p.182-192, 1987.

HEADY, E.O.; DILLON, J.L. **Agricultural production functions**. [S.l.]: Iowa State Univ. Press, 1961. 667p.

HEADY, E.O; PESEK, J. A fertilizer production surface with specification of economic optima for corn grown on calcareous Ida Silt Loam. **Journal Farm Economics**, v.36, p.466-482, 1954.

HEADY, E.O.; PESEK, J.T.; BROWN, W.G. **Corn response surfaces and economic optima in fertilizer use**. [S.l.: s.n.], 1955. (Iowa State Exp. Sta. Research Bulletin, 424).

HEXEM, R.W.; HEADY, E.O. **Water production functions for irrigated agriculture**. Ames: Iowa State Univ. Press, 1978.

JAUREGUI, M.A.; PARIS, Q. Spline response functions for direct and carry-over effects involving a single nutrient. **Soil Science Society American Journal**, v.49, p.140-145, 1984.

KREUZ, C.L. **von Liebig Models with decreasing yields, Mitscherlich's Law of physiological relations and the relative yield framework**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia de Produção. 1994. Tese de Doutorado.

LANZER, E. A.; PARIS, Q.; WILLIAMS, W.A. A dynamic model for technical and economic analysis of fertilizer recommendations. **Agronomy Journal**, v.73, p.733-737, 1981.

LANZER, E. A.; PARIS, Q.; WILLIAMS, W.A. **A nonsubstitution dynamic model for optimal fertilizer recommendations.** [S.l.: s.n.], 1987. 53p. (Giannini Foundation Monograph, 41).

MILLER, P.R.M. **Nitrogen nutrition and associated ecological effects in conventional and organic agricultural systems**. Davis: University of California, 1991. Ph.D. Thesis.

MITSCHERLICH, E.A. Das Gesetz des Minimums und das Gesetz des abnehmenden Bodenertrages. **Landwirtschaftliche Jahrbücher**, v.38, p.537-552, 1909.

PARIS, Q. The von Liebig Hypothesis. **American Journal of Agricultural Economics**, v.74, p.1019--1028, 1992a.

PARIS, Q. The return of von Liebig's 'Law of the Minimum'. **Agronomy Journal**, v.84, p.1040--1046, 1992b.

PARIS, Q.; KNAPP, K. Estimation of von Liebig Response Functions. **American Journal Agricultural Economics**, v.71, p.178-186, 1989.

TISDALE, S.L.; NELSON, W.L.; BEATON, J.D. **Soil fertility and fertilizers**. 4.ed. [S.l.]: Macmillan Publishing, 1985.

WALLACE, A. Crop improvement through multidisciplinary approaches to different types of stresses — Law of the Maximum. **Journal of Plant Nutrition**, v.13, p.313-325, 1990.